Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Funktionenscharen

Aufgabe: Gegeben ist die Funktionenschar der ganz rationalen Funktionen 3. Grades:

$$f_t(x) = \frac{x^2(x-t)}{t}$$

mit reellem Parameter $t \neq 0$.

a) Für welchen Parameter t schneidet der Graph der Funktion $f_t(x)$ an der Stelle x = 2 die x-Achse?

b) Bestimme den Parameter t, so dass die Funktion $f_t(x)$ an der Stelle x = -2 einen Tiefpunkt besitzt.

c) Die Funktion $f_t(x)$ verfügt an der Stelle x = 1 über einen Wendepunkt. Berechne den Parameter t.

Lösung: I. Allgemein gilt: Funktionenscharen (Funktionen mit Parametern, Parameterfunktionen) entstehen, wenn Funktionsgleichungen zur Funktionsvariablen x zusätzlich reelle Parameter t enthalten, wenn also: $f_t(x) = f(x, t)$ mit einer beliebigen, aber festen Zahl t gilt. Die Kurven $f_t(x)$ mit den vorgegebenen reellen t stellen die Funktionenschar grafisch dar, etwa als „Funktionenbüschel“ oder als Schar zueinander paralleler Funktionen (z.B. bei Stammfunktionen). Funktionenscharen entstehen auch durch Verschiebung und/oder Streckung von Funktionen ($f_t(x) = f(x+t)$, $f_t(x) = t\cdot f(x)$ usw.). Für Parameterfunktionen gelten alle mathematischen Gesetzmäßigkeiten der Differential- und Integralrechnung.

II. Besondere Kurvenpunkte lassen sich bei Funktionenscharen $f_t(x)$ wie folgt ermitteln:

$f_t(x) = 0$ -> Nullstellen x_1, …
$f_t'(x) = 0$ -> Hochpunkte, Tiefpunkte x_1, … mit $f_t''(x_1) < 0$ oder $f_t''(x_1) > 0$, …
$f_t''(x) = 0$ -> Wendepunkte x_1, … mit $f_t'''(x_1) \neq 0$, …

Bei vorgegeben Null-, Extrem- und Wendestellen x_1, … lassen aus den obigen Gleichungen die zugehörigen Parameter t berechnen:

Nullstellen: $f_t(x_1) = 0$, … -> t_1, …
Hochpunkte, Tiefpunkte: $f_t'(x_1) = 0$, … -> t_1, …
Wendepunkte: $f_t''(x_1) = 0$, … -> t_1, …

III. Wir formen den Term der Funktionenschar $f_t(x)$ um:

$$f_t(x) = \frac{x^2(x-t)}{t} = \frac{x^3 - x^2 t}{t} = \frac{x^3}{t} - x^2 = \frac{1}{t}x^3 - x^2,\ t \neq 0$$

und bilden die ersten drei Ableitungen:

$$f_t'(x) = \frac{3}{t}x^2 - 2x$$

$$f_t''(x) = \frac{6}{t}x - 2$$

$$f_t'''(x) = \frac{6}{t}.$$

IV. a) Gemäß dem Voranstehenden gilt die folgende Vorgehensweise hinsichtlich der Parameterfunktion mit Nullstelle x = 2:

$f_t(2) = 0 \Leftrightarrow \frac{2^2 \cdot (2-t)}{t} = 0 \Leftrightarrow 2\text{-}t = 0 \Leftrightarrow t = 2.$

Der gesuchte Parameter lautet: t = 2, die dazugehörige Funktion: $f_2(x) = \frac{x^2(x-2)}{2}$.

b) Die Funktion $f_t(x)$ hat an der Stelle x = -2 einen Tiefpunkt. Hieraus folgt:

$f_t'(-2) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{t}(-2)^2 - 2\cdot(-2) = 0 \Leftrightarrow \frac{12}{t} + 4 = 0 \Leftrightarrow 12 + 4t = 0 \Leftrightarrow 4t = -12 \Leftrightarrow t = -3$

für den Parameter t. Die infrage kommende Funktion lautet: $f_{-3}(x) = -\frac{x^2(x+3)}{3}$, zumal diese Funktion an der Stelle x = -2 wegen $f_{-3}''(-2) = \frac{6}{-3}(-2) - 2 = 4 - 2 = 2 > 0$ wirklich einen Tiefpunkt besitzt mit: T(-2|-4/3) (<- $f_{-3}(-2) = -\frac{(-2)^2(-2+3)}{3} = -\frac{4}{3}$).

c) Die Funktion $f_t(x)$ verfügt an der Stelle x = 1 über einen Wendepunkt. Daher gilt:

$f_t''(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{6}{t}\cdot 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow 6 - 2t = 0 \Leftrightarrow 6 = 2t \Leftrightarrow t = 3.$

Der gesuchte Parameter ist t = 3, die gesuchte Funktion $f_3(x) = \frac{x^2(x-3)}{3}$ besitzt an der Stelle x = 1 den Wendepunkt wegen $f_3'''(1) = \frac{6}{3} = 2 \neq 0$. Der Wendepunkt hat die Koordinaten W(1|-2/3) (<- $f_3(1) = \frac{1^2(1-3)}{3} = -\frac{2}{3}$).

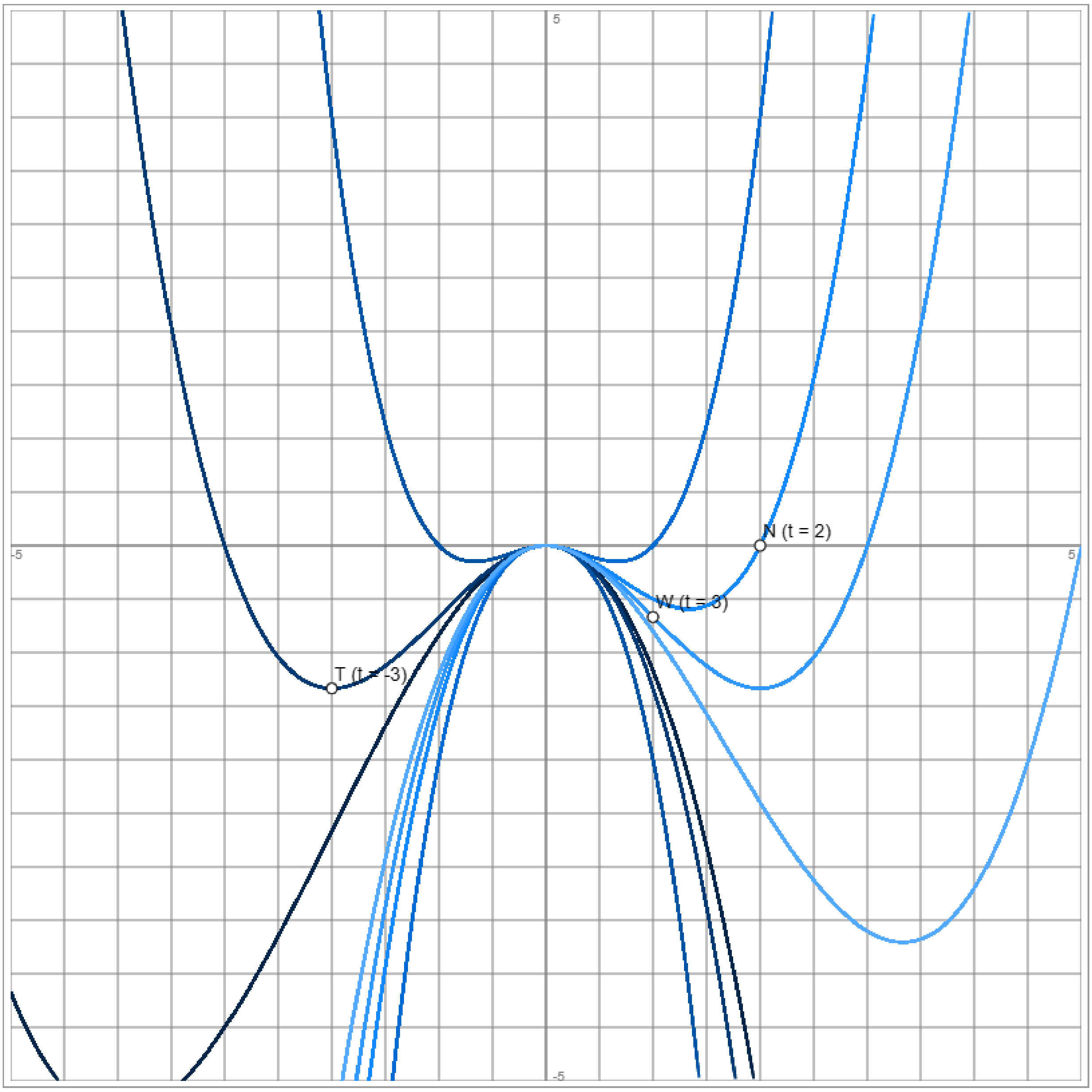
V. Die Funktionenschar (für t = -6, -3, -1, 1, 2, 3, 5) ist nachfolgend erfasst in der Wertetabelle und als Graphen; in das x-y-Koordinatensystem wurden zudem eingetragen: Nullstelle N(2|0) (t = 2), Tiefpunkt T(-2|-4/3) (t = -3), Wendepunkt W(1|-2/3) (t = 3):

Wertetabelle:

x	$f_{-6}(x)$	$f_{-3}(x)$	$f_{-1}(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_5(x)$
-5	-4.1667	16.6667	100	-150	-87.5	-66.6667	-50
-4.5	-5.0625	10.125	70.875	-111.375	-65.8125	-50.625	-38.475
-4	-5.3333	5.3333	48	-80	-48	-37.3333	-28.8
-3.5	-5.1042	2.0417	30.625	-55.125	-33.6875	-26.5417	-20.825
-3	-4.5	0	18	-36	-22.5	-18	-14.4
-2.5	-3.6458	-1.0417	9.375	-21.875	-14.0625	-11.4583	-9.375
-2	-2.6667	-1.3333	4	-12	-8	-6.6667	-5.6
-1.5	-1.6875	-1.125	1.125	-5.625	-3.9375	-3.375	-2.925
-1	-0.8333	-0.6667	0	-2	-1.5	-1.3333	-1.2
-0.5	-0.2292	-0.2083	-0.125	-0.375	-0.3125	-0.2917	-0.275
0	0	0	0	0	0	0	0
0.5	-0.2708	-0.2917	-0.375	-0.125	-0.1875	-0.2083	-0.225
1	-1.1667	-1.3333	-2	0	-0.5	-0.6667	-0.8
1.5	-2.8125	-3.375	-5.625	1.125	-0.5625	-1.125	-1.575
2	-5.3333	-6.6667	-12	4	0	-1.3333	-2.4
2.5	-8.8542	-11.4583	-21.875	9.375	1.5625	-1.0417	-3.125
3	-13.5	-18	-36	18	4.5	0	-3.6

3.5	-19.3958	-26.5417	-55.125	30.625	9.1875	2.0417	-3.675
4	-26.6667	-37.3333	-80	48	16	5.3333	-3.2
4.5	-35.4375	-50.625	-111.375	70.875	25.3125	10.125	-2.025
5	-45.8333	-66.6667	-150	100	37.5	16.6667	0

Graphen:



www.michael-buhlmann.de / 01.2023 / Aufgabe 1781