Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Trigonometrische Funktionen

Aufgabe: Beweise die Identität

$$\sin^2(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}(1-\cos x)$$

für alle reellen x..

Lösung: I. Wir betrachten zunächst die <u>Sinusfunktion</u> $f(x) = \sin^2(\frac{x}{2})$. Zusammen mit den Ableitungen:

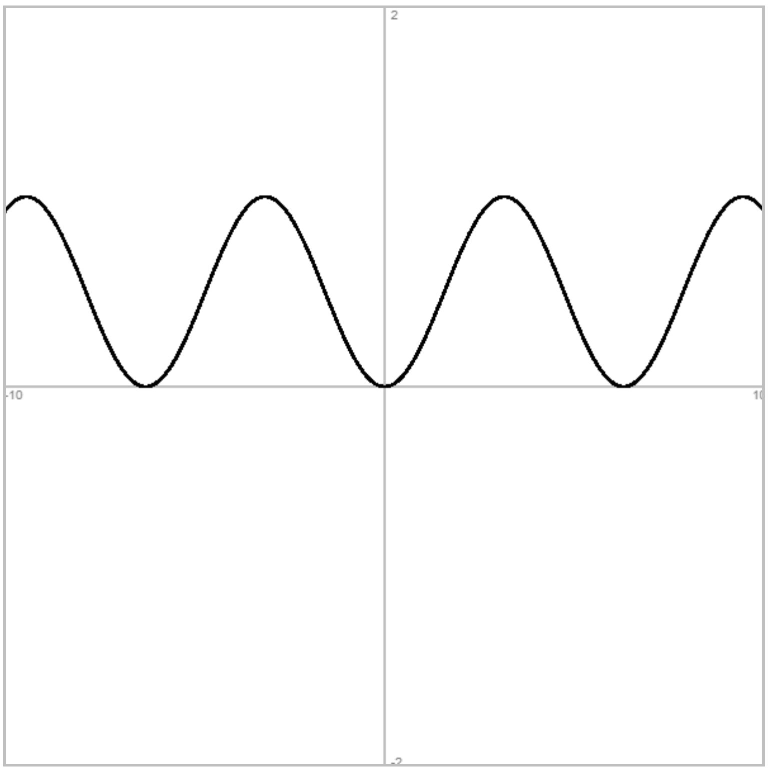
$$f'(x) = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})\cdot\frac{1}{2} = \sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})$$

$$f''(x) = \cos(\frac{x}{2})\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos(\frac{x}{2}) + \sin(\frac{x}{2})\cdot\left(-\sin(\frac{x}{2})\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cos^2(\frac{x}{2}) - \frac{1}{2}\sin^2(\frac{x}{2})$$

haben wir:

f'(x) = 0 => sin(x/2)·cos(x/2) = 0 => sin(x/2) =0, cos(x/2) = 0 => x/2 = kπ, x/2 = (2k+1)π/2 => x = 2kπ, x = (2k+1)π mit T(2kπ|0) als Tief- (wegen f''(2kπ)>0), H((2k+1)π|1) als Hochpunkte (wegen f''((2k+1)π)<0), k ganzzahlig.

Die Funktion f(x) stellt sich damit dar als eine trigonometrische Grundfunktion mit fester Periode, Mittellinie und Amplitude:



II. Wir bestimmen nun eine Kosinusfunktion $g(x) = a\cos(bx) + c$, die mit der Funktion f(x) identisch ist. Dazu betrachten wir die Sinusunktion f(x) und ermitteln als deren Periode p:

$p = x_{\text{Tiefpunkt}} – x_{\text{vorhergehender Tiefpunkt}} = 2k\pi – 2(k-1)\pi = 2k\pi – 2k\pi + 2\pi = 2\pi$.

Als Mittellinie c ergibt sich:

$c = (y_{\text{Hochpunkt}}+y_{\text{Tiefpunkt}})/2 = (1+0)/2 = 0{,}5$.

Der Betrag der Amplitude |a| ist demzufolge:

$|a| = y_{\text{Hochpunkt}} – c = 1 – 0{,}5 = 0{,}5$.

Berücksichtigen wir noch, dass $b = 2\pi/p$ gilt, so haben wir:

$b = 2\pi/(2\pi) = 1$.

Die Sinusfunktion f(x) lässt sich folglich mit einer Kosinusfunktion g(x) identifizieren, wobei auf Grund des Tiefpunkts T(0|0) a = -0,5 gelten muss. Es ergibt sich:

$g(x) = -0{,}5\cdot\cos(1\cdot x) + 0{,}5 = -0{,}5\cdot\cos(x) + 0{,}5 = 0{,}5(-\cos(x) +1) = 0{,}5(1–\cos(x))$.

III. Wegen der für alle reellen x gegebenen Identität f(x) = g(x) gilt die Gleichheit:

$$\sin^2(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}(1-\cos x).$$

www.michael-buhlmann.de / 12.2020 / Aufgabe 1216