Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Flächenintegral

Aufgabe: Der Inhalt der Fläche zwischen den Funktionen $f(x) = -x^2 + 4$ und $g(x) = 2x + 1$ ist zu berechnen.

Lösung: I. Es gilt allgemein die folgende

Vorgehensweise:
Bestimmung der Schnittstellen zweier Funktionen f(x) und g(x): f(x) = g(x) (auf einem Intervall [a; b]). (Intervallgrenzen und) Schnittstellen sind: x_1, x_2, x_3, … (n Schnittstellen, n-1 Flächen)
Bestimmung einer Stammfunktion H(x) zu h(x) = f(x) – g(x) (Differenzfunktion h(x) vereinfachen)
Errechnung der bestimmten Integrale als Teilflächen: $\pm A_1 = \int_{x_1}^{x_2} h(x)dx = [H(x)]_{x_1}^{x_2}$, $\pm A_2 = \int_{x_2}^{x_3} h(x)dx = [H(x)]_{x_2}^{x_3}$, …
Aufaddieren der Teilflächen zur Gesamtfläche: A = A_1 + A_2 + …

Fläche zwischen zwei Funktionen

II. Als Schnittstellen der Funktionen f(x) und g(x) berechnen wir:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 + 4 = 2x + 1 \Leftrightarrow 0 = x^2 + 2x - 3 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \vee x_2 = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Die Schnittstellen begrenzen als untere Grenze x = -3 und als obere Grenze x = 1 den Integrationsbereich des nun zu berechnenden bestimmten Integrals, das wiederum bei *zwei* Schnittstellen für *eine* Fläche zwischen den Funktionen f(x) und g(x) steht.

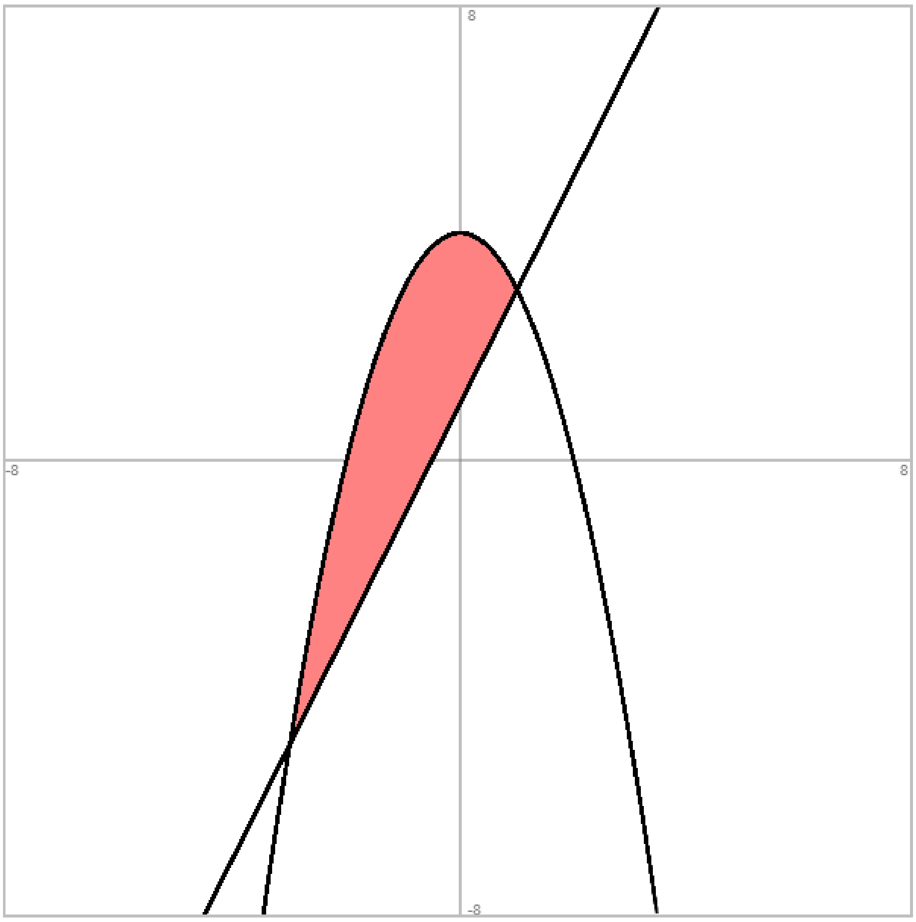
III. Zu beachten ist, dass bei der Schnittstellenberechnung der Term $g(x) - f(x) = x^2 + 2x - 3$ = h(x) aufgetreten ist. Diesen verwenden wir, um mit ihm das bestimmte Flächenintegral zu errechnen. Aus $h(x) = x^2 + 2x - 3$ folgt zunächst als Stammfunktion: $H(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x$. Wir berechnen dann das bestimmte (Flächen-) Integral in den errechneten Grenzen:

$$\int_{-3}^{1}(x^2 + 2x - 3)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x\right]_{-3}^{1} = \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-3)^3 + (-3)^2 - 3 \cdot (-3)\right) =$$

$$-\frac{5}{3} - 9 = -\frac{32}{3} = -10\frac{2}{3}.$$

Da das bestimmte Integral negativ ist, ist sein mit dem Faktor -1 multiplizierter Wert identisch mit dem Flächeninhalt der Fläche zwischen den Funktionen f(x) und g(x), also:

A = $-\left(-10\frac{2}{3}\right)$ = $10\frac{2}{3}$ FE.



(FE = Flächeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 10.2022 / Aufgabe 1732