Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Flächenintegral

Aufgabe: Der Inhalt der Fläche zwischen den Funktionen $f(x) = x^2 - 1$ und $g(x) = 15$ ist zu berechnen.

Lösung: I. Es gilt allgemein die folgende

Vorgehensweise:
Bestimmung der Schnittstellen zweier Funktionen f(x) und g(x): f(x) = g(x) (auf einem Intervall [a; b]). (Intervallgrenzen und) Schnittstellen sind: x_1, x_2, x_3, … (n Schnittstellen, n-1 Flächen)
Bestimmung einer Stammfunktion H(x) zu h(x) = f(x) – g(x) (Differenzfunktion h(x) vereinfachen)
Errechnung der bestimmten Integrale als Teilflächen: $\pm A_1 = \int_{x_1}^{x_2} h(x)dx = [H(x)]_{x_1}^{x_2}$, $\pm A_2 = \int_{x_2}^{x_3} h(x)dx = [H(x)]_{x_2}^{x_3}$, …
Aufaddieren der Teilflächen zur Gesamtfläche: A = A_1 + A_2 + …

Fläche zwischen zwei Funktionen

II. Als <u>Schnittstellen</u> der Funktionen f(x) und g(x) berechnen wir:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 1 = 15 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4.$

Die Schnittstellen begrenzen als untere Grenze x = -4 und als obere Grenze x = 4 den Integrationsbereich des nun zu berechnenden bestimmten Integrals, das wiederum bei *zwei* Schnittstellen für *eine* Fläche zwischen den Funktionen f(x) und g(x) steht.

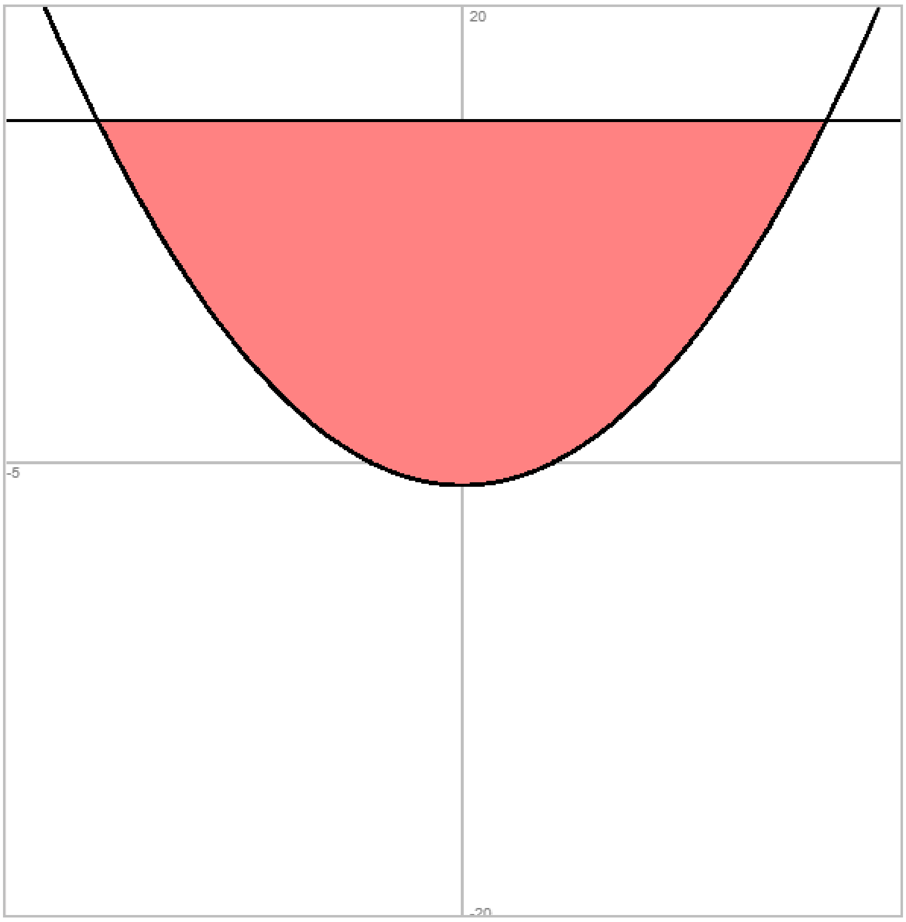
III. Zu beachten ist, dass bei der Flächenberechnung etwa über den Term $f(x) - g(x) =$ $x^2 - 1 - 15 = x^2 - 16$ = h(x) zu integrieren ist. Aus $h(x) = x^2 - 16$ folgt zunächst als <u>Stammfunktion</u>: $H(x) = \frac{1}{3}x^3 - 16x$. Wir berechnen dann das bestimmte (Flächen-) Integral in den errechneten Grenzen x = -4, x = 4:

$$\int_{-4}^{4}(x^2 - 16)dx = 2\int_{0}^{4}(x^2 - 16)dx = 2 \cdot \left[\frac{1}{3}x^3 - 16x\right]_0^4 = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 4^3 - 16 \cdot 4\right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 0^3 - 16 \cdot 0\right) =$$
$$2 \cdot \left(-\frac{128}{3}\right) - 0 = -\frac{256}{3}$$

auch auf Grund der y-Achsensymmetrie der Funktion h(x). Da das bestimmte Integral negativ ist, ist der <u>Flächeninhalt</u> der Fläche zwischen den Funktionen f(x) und g(x) auf dem Intervall [-4; 4] das Negative des Integralwerts, also:

A = $-\left(-\frac{256}{3}\right)$ = $\frac{256}{3} \approx 85\frac{1}{3}$ FE.

Im Übrigen liegt wegen des negativen Integralwerts und der somit nicht positiven Differenzfunktion h(x) im x-y-Koordinatensystem auf dem Intervall [-4; 4] der Graph der Funktion f(x) unterhalb des Graphen der Funktion g(x) mit: f(x) ≤ g(x).



(FE = Flächeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 12.2023 / Aufgabe 1932