Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Folgen, Reihen
> Grenzwerte von Folgen

Aufgabe: Berechne den Grenzwert der Folge:

$$\lim_{n->\infty} \frac{n^2 - 7n + 8}{4 + n + 2n^2}.$$

Lösung: I. Eine Abbildung $\{a_n\}$: **N** -> **R**, die jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zuordnet, heißt (unendliche) (Zahlen-) Folge: n -> a_n oder $\{a_n\}_{n\varepsilon\mathbf{N}}$, a_n das n-te Folgenglied. Mit a_n = f(n) definiert f die Funktionsvorschrift der Folge.
Eine Folge $\{a_n\}$ heißt konvergent, d.h. besitzt einen Grenzwert (Limes) g, wenn (für jedes ε>0) in jeder noch so kleinen (ε-) Umgebung um g (dem offenen Intervall (g-ε, g+ε)) ab einem gewissen n (= n(ε)) alle Folgenglieder liegen. Dann gilt: $g = \lim_{n->\infty} a_n$. Eine Folge mit Grenzwert g = 0 heißt Nullfolge; die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge mit: $\lim_{n->\infty} \frac{1}{n} = 0$. Falls alle Grenzwerte existieren, gelten die folgenden Grenzwertsätze: $\lim_{n->\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n->\infty} a_n + \lim_{n->\infty} b_n$; $\lim_{n->\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n->\infty} a_n$; $\lim_{n->\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n->\infty} a_n \cdot \lim_{n->\infty} b_n$; $\lim_{n->\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{\lim_{n->\infty} a_n}{\lim_{n->\infty} b_n}$; $\lim_{n->\infty} a_n^r = (\lim_{n->\infty} a_n)^r$; $\lim_{n->\infty} f(a_n) = f(\lim_{n->\infty} a_n)$ bei stetigen reellwertigen Funktion f(x), bei reellen c, r und für Folgen $\{a_n\}$, $\{b_n\}$.

II. Als gesuchter Grenzwert ergibt sich nach den Grenzwertsätzen und mit den Folgen $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in N}$, $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}_{n\in N}$ als Nullfolgen:

$$\lim_{n->\infty} \frac{n^2 - 7n + 8}{4 + n + 2n^2} = \lim_{n->\infty} \frac{1 - \frac{7}{n} + \frac{8}{n^2}}{\frac{4}{n^2} + \frac{1}{n} + 2} = \frac{\lim_{n->\infty}(1 - \frac{7}{n} + \frac{8}{n^2})}{\lim_{n->\infty}(\frac{4}{n^2} + \frac{1}{n} + 2)} = \frac{\lim_{n->\infty} 1 - \lim_{n->\infty} \frac{7}{n} + \lim_{n->\infty} \frac{8}{n^2}}{\lim_{n->\infty} \frac{4}{n^2} + \lim_{n->\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n->\infty} 2} = \frac{1 - 0 + 0}{0 + 0 + 2} = \frac{1}{2}.$$

www.michael-buhlmann.de / 11.2020 / Aufgabe 1188