Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Folgen, Reihen
> Grenzwerte von Folgen

Aufgabe: Berechne den Grenzwert der Folge:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-n}\right).$$

Lösung: I. Eine Abbildung $\{a_n\}$: **N** -> **R**, die jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zuordnet, heißt (unendliche) (Zahlen-) <u>Folge</u>: n -> a_n oder $\{a_n\}_{n\varepsilon \mathbf{N}}$, a_n das n-te Folgenglied. Mit a_n = f(n) definiert f die Funktionsvorschrift der Folge.
Eine Folge $\{a_n\}$ heißt <u>konvergent</u>, d.h. besitzt einen Grenzwert (Limes) g, wenn (für jedes ε>0) in jeder noch so kleinen (ε-) Umgebung um g (dem offenen Intervall (g-ε, g+ε)) ab einem gewissen n (= n(ε)) alle Folgenglieder liegen. Dann gilt: $g=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Eine Folge mit Grenzwert g = 0 heißt <u>Nullfolge</u>; die Folge $a_n=\frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge mit: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Falls alle Grenzwerte existieren, gelten die folgenden <u>Grenzwertsätze</u>: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n$; $\lim\limits_{n\to\infty}(c\cdot a_n)=c\cdot\lim\limits_{n\to\infty}a_n$; $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n$; $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n})=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$; $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^r=(\lim\limits_{n\to\infty}a_n)^r$; $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=f(\lim\limits_{n\to\infty}a_n)$ bei stetigen reellwertigen Funktion f(x), bei reellen c, r und für Folgen $\{a_n\}$, $\{b_n\}$.

II. Als gesuchter <u>Grenzwert</u> ergibt sich nach Umformungen mit Hilfe der 3. binomischen Formel und den Grenzwertsätzen:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-n}\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-n}\right)}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-n}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}^2-\sqrt{n^2-n}^2}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n)-(n^2-n)}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-n^2+n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-n}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2(1+\frac{2}{n})}+\sqrt{n^2(1-\frac{1}{n})}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n\cdot\sqrt{1+\frac{2}{n}}+n\cdot\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{3}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{3}{\sqrt{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}}=\frac{3}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=$$

$$\frac{3}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}=1{,}5.$$

www.michael-buhlmann.de / 11.2020 / Aufgabe 1191