

Mathematikaufgaben

> Folgen, Reihen

> Grenzwerte von Folgen

Aufgabe: Berechne den Grenzwert der Folge:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{n-20}.$$

Lösung: I. Eine Abbildung $\{a_n\}: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$, die jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zuordnet, heißt (unendliche) (Zahlen-) Folge: $n \rightarrow a_n$ oder $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, a_n das n -te Folgenglied. Mit $a_n = f(n)$ definiert f die Funktionsvorschrift der Folge.

Eine Folge $\{a_n\}$ heißt konvergent, d.h. besitzt einen Grenzwert (Limes) g , wenn (für jedes $\varepsilon > 0$) in jeder noch so kleinen (ε -) Umgebung um g (dem offenen Intervall $(g-\varepsilon, g+\varepsilon)$) ab einem gewissen n ($= n(\varepsilon)$) alle Folgenglieder liegen. Dann gilt: $g = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Eine Folge mit Grenzwert $g = 0$ heißt Nullfolge;

die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge mit: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Falls alle Grenzwerte existieren, gelten die folgenden Grenzwertsätze:

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$; $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$;
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^r = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)^r$; $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)$ bei stetigen reellwertigen Funktion $f(x)$, bei reellen c, r und für Folgen $\{a_n\}, \{b_n\}$.

II. Die Eulersche Zahl e lässt sich vermöge eines Folggrenzwertes als $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ darstellen.

Hieraus ergibt sich weiter die Beziehung: $e^a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ (*) auf Grund der Überlegung:

$$e^a = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{na} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{na}\right)^{na} = \lim_{na=m, m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{m}\right)^m.$$

III. Als gesuchter Grenzwert ergibt sich nach Umformungen, mit der Beziehung (*) und den Grenzwertsätzen:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{n-20} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{-20} \cdot \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{-20} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^n = \\ &= \left(1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3n}\right)^{-20} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^n = (1+0)^{-20} \cdot e^{\frac{2}{3}} = 1 \cdot \sqrt[3]{e^2} = \sqrt[3]{e^2}. \end{aligned}$$