Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Folgen, Reihen
> Explizite Folge

Aufgabe: Untersuche die Folge:

$$a_n = \frac{2n^2+11}{3n^2+4}$$

auf Konvergenz.

1. Lösung: I. Wir definieren: Eine Folge $\{a_n\}$ heißt konvergent, d.h. besitzt einen Grenzwert (Limes) g, wenn (für jedes ε>0) in jeder noch so kleinen (ε-) Umgebung um g (dem offenen Intervall (g-ε, g+ε)) ab einem gewissen n (= n(ε)) alle Folgenglieder liegen, d.h.:

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

Im Fall der Konvergenz gilt:

$$g = \lim_{n->\infty} a_n .$$

II. Wir haben für die Folge $a_n = \frac{2n^2+11}{3n^2+4}$ die Folgenglieder: $a_1 = \frac{13}{7}$, $a_2 = \frac{19}{16}$, $a_3 = \frac{27}{31}$, $a_4 = \frac{43}{52}$, …, so dass als Grenzwert g die Zahl 2/3 (siehe auch 2. Lösung) zu vermuten ist:

Behauptung: a_n ist konvergent mit Grenzwert g = $\frac{2}{3}$.

Beweis:

$\lvert a_n - g \rvert < \varepsilon$	für alle ε > 0 und alle nε**N** ab einem gewissen $n_0(\varepsilon)$
$\left\lvert \frac{2n^2+11}{3n^2+4} - \frac{2}{3} \right\rvert < \varepsilon$	| auf einen Nenner bringen
$\left\lvert \frac{3\cdot(2n^2+11) - 2\cdot(3n^2+4)}{3\cdot(3n^2+4)} \right\rvert < \varepsilon$	
$\left\lvert \frac{6n^2+33-6n^2-8}{3\cdot(3n^2+4)} \right\rvert < \varepsilon$	
$\left\lvert \frac{25}{3\cdot(3n^2+4)} \right\rvert < \varepsilon$	| Beträge fallen weg (Zähler > 0, Nenner > 0)
$\frac{25}{3\cdot(3n^2+4)} < \varepsilon$	| Kehrwerte bilden (< → >)
$\frac{3\cdot(3n^2+4)}{25} > \frac{1}{\varepsilon}$	| ·25, :3
$3n^2+4 > \frac{25}{3\varepsilon}$	| –4
$3n^2 > \frac{25}{3\varepsilon} - 4$	| :3
$n^2 > \frac{25}{9\varepsilon} - \frac{4}{3}$	| √

$n > \sqrt{\frac{25}{9\varepsilon} - \frac{4}{3}}$ wahr für alle n ≥ $n_0(\varepsilon)$ mit $n_0(\varepsilon) > \sqrt{\frac{25}{9\varepsilon} - \frac{4}{3}}$

2. Lösung: I. Ist eine Folge ein Bruch mit Zähler und Nenner als Summen von Potenzen, so gilt:

$$\lim_{n->\infty} \frac{r \cdot p_1(n) + ...}{s \cdot p_2(n) + ...} = \begin{cases} \pm\infty & p_1(n) > p_2(n) \\ \frac{r}{s} & p_1(n) = p_2(n) \\ 0 & p_1(n) < p_2(n) \end{cases}$$

Die Potenzen $p_1(n)$ und $p_2(n)$ sind dabei u.a. vom Typ n^k, $k \in \mathbf{R}$.

II. Für den Zähler $Z(n) = 2n^2 + 11$ der Folge a_n ist der Ausdruck $2n^2$ die höchste Potenz, für den Nenner $N(n) = 3n^2 + 4$ der Term $3n^2$ der Ausdruck mit der höchsten Potenz. Beide höchste Potenzen sind gleich, die Koeffizienten vor den Potenzen sind r=2 und s=3, als Grenzwert ergibt sich also die Zahl r/s, mithin gilt: $\lim_{n->\infty} a_n = \frac{2}{3}$.

www.michael-buhlmann.de / 09.2014 / Aufgabe 51