Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Achsenpunkte/Ebenen

Aufgabe: Wie lauten die Punkte auf den Achsen des dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystems, die den Abstand 4 LE von der Ebene

$$E: 2x_1 + 11x_2 + 10x_3 = 110$$

haben?

1. Lösung: I. Allgemein lässt sich die Aufgabenstellung einordnen unter die Ermittlung von Punkten auf einer Geraden g: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, die einen gewissen Abstand D zu einer Ebene E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ haben, mit Hilfe der Hesseschen Normalform:

$$d(P,E) = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

als Abstandsbestimmung zwischen der Ebene E und einem Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ auf der Geraden. Jeder Punkt auf der Geraden g lässt sich darstellen in der Form: $P(a_1+tv_1|a_2+tv_2|a_3+tv_3)$,
so dass bei vorgegebenem Abstand D die Betragsgleichung:

$$\frac{|a(a_1+tv_1)+b(a_2+tv_2)+c(a_3+tv_3)-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = D \Leftrightarrow |(av_1+bv_2+cv_3)t + aa_1 + ba_2 + ca_3 - d| = D\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

nach t aufzulösen ist. Weglassen des Betrags führt auf:

$$(av_1+bv_2+cv_3)t+aa_1+ba_2+ca_3-d=\pm D\sqrt{a^2+b^2+c^2} \Leftrightarrow t_{1,2}=\frac{d-aa_1-ba_2-ca_3\pm D\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{av_1+bv_2+cv_3}$$

als (maximal zwei) Lösungen. Die gesuchten Punkte auf der Geraden g mit Abstand D zur Ebene E lauten dann:
$P_1(a_1+t_1v_1|a_2+t_1v_2|a_3+t_1v_3)$, $P_2(a_1+t_2v_1|a_2+t_2v_2|a_3+t_2v_3)$.

II. <u>x_1-Achse</u>: Die x_1-Achse lässt sich darstellen als Gerade g_1: $\vec{x}=t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, ein Punkt auf der Geraden g_1 als: P(t|0|0). Die Hessesche Normalform führt mit Abstand D = 4 zur Ebene E: $2x_1 + 11x_2 + 10x_3 = 110$ auf die Gleichung:

$d(P,E) = \frac{|2t+0+0-110|}{\sqrt{2^2+11^2+10^2}}=\frac{|2t-110|}{\sqrt{225}}=\frac{|2t-110|}{15}$ = 4 ⇔ |2t–110| = 60 ⇔ 2t–110 = ±60 ⇔ 2t = 110±60 ⇔ t = 170/2 = 85, t = 50/2 = 25,

so dass sich als gesuchte Achsenpunkte die Geradenpunkte $P_{11}(85|0|0)$, $P_{21}(25|0|0)$ ergeben.

III. <u>x_2-Achse</u>: Die x_2-Achse lässt sich darstellen als Gerade g_2: $\vec{x}=t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, ein Punkt auf der Geraden g_2 als: P(0|t|0). Die Hessesche Normalform führt mit Abstand D = 4 zur Ebene E: $2x_1 + 11x_2 + 10x_3 = 110$ auf die Gleichung:

$d(P,E) = \frac{|0+11t+0-110|}{\sqrt{2^2+11^2+10^2}}=\frac{|11t-110|}{\sqrt{225}}=\frac{|11t-110|}{15}$ = 4 ⇔ |11t–110| = 60 ⇔ 11t–110 = ±60 ⇔ 11t = 110±60 ⇔ t = 170/11, t = 50/11,

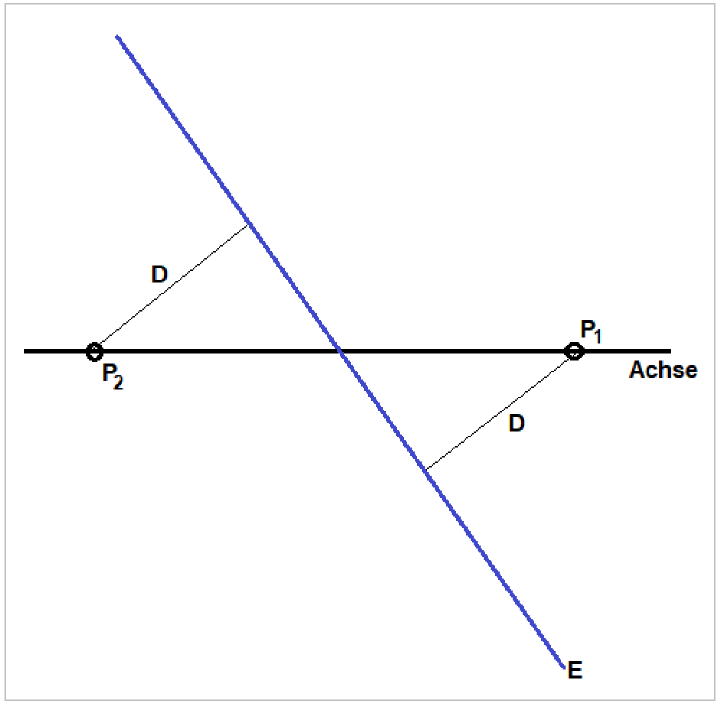
so dass sich als gesuchte Achsenpunkte die Geradenpunkte $P_{12}(0|170/11|0)$, $P_{22}(0|50/11|0)$ ergeben.

III. <u>x_3-Achse</u>: Die x_3-Achse lässt sich darstellen als Gerade g_3: $\vec{x}=t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, ein Punkt auf der Geraden g_3 als: P(0|0|t). Die Hessesche Normalform führt mit Abstand D = 4 zur Ebene E: $2x_1 + 11x_2 + 10x_3 = 110$ auf die Gleichung:

$d(P,E) = \frac{|0+0+10t-110|}{\sqrt{2^2+11^2+10^2}}=\frac{|10t-110|}{\sqrt{225}}=\frac{|10t-110|}{15}$ = 4 ⇔ |10t–110| = 60 ⇔ 10t–110 = ±60 ⇔ 10t = 110±60 ⇔ t = 170/10 = 17, t = 50/10 = 5,

so dass sich als gesuchte Achsenpunkte die Geradenpunkte $P_{13}(0|0|17)$, $P_{23}(0|0|5)$ ergeben.

IV. Insgesamt erhalten wir als gesuchte <u>Achsenpunkte</u>, die den Abstand 4 von der Ebene E: $2x_1 + 11x_2 + 10x_3 = 110$ haben:
$P_{11}(85|0|0)$, $P_{21}(25|0|0)$ (x_1-Achse)
$P_{12}(0|170/11|0)$, $P_{22}(0|50/11|0)$ (x_2-Achse)
$P_{13}(0|0|17)$, $P_{23}(0|0|5)$ (x_3-Achse).



2. Lösung: I. Zur Bestimmung der gesuchten Punkte auf den Achsen des Koordinatensystems beachten wir zunächst, dass alle Punkte, die einen gewissen Abstand D zu einer Ebene E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ haben, auf zwei zur Ebene E parallelen Ebenen F_1 und F_2 liegen, die sich (etwa nach der Hesseschen Normalform) mit Normalenvektor $\vec{n} = (a\ b\ c)^T$ bestimmen lassen als:

F_1: $ax_1+bx_2+cx_3 = d + D\cdot|\vec{n}| = d_1$
F_2: $ax_1+bx_2+cx_3 = d - D\cdot|\vec{n}| = d_2$.

Die zu ermittelnden Punkte sind dann die Spurpunkte der Ebenen F_1 und F_2 auf der x_1-, x_2- und x_3-Achse und damit:

$P_{11}(d_1/a|0|0)$, $P_{12}(0|d_1/b|0)$, $P_{13}(0|0|d_1/c)$ (zu Ebene F_1 und x_1-, x_2-, x_3-Achse)
$P_{21}(d_2/a|0|0)$, $P_{22}(0|d_2/b|0)$, $P_{23}(0|0|d_2/c)$ (zu Ebene F_2 und x_1-, x_2-, x_3-Achse).

Die Punkte P_{11} bis P_{23} existieren, wenn der jeweilige Koeffizient a, b oder c ungleich null ist. Ist ein Koeffizient a, b oder c gleich null, so ist die Ebene E zu einer Achse des Koordinatensystems parallel, und es gibt entweder keinen oder unendlich viele Achsenpunkte mit der Abstandseigenschaft.

II. Wir ermitteln die parallelen Ebenen zur Ebene E: $2x_1 + 11x_2 + 10x_3 = 110$ mit Abstand D = 4 und erhalten gemäß eben beschriebener Vorgehensweise und mit dem Betrag des Normalenvektors von E als $|\vec{n}| = (2^2+11^2+10^2)^{1/2} = \sqrt{225} = 15$ die Ebenen F_1 und F_2 wie folgt:

F_1: $2x_1 + 11x_2 + 10x_3 = 110 + 4\cdot 15 = 170$
F_2: $2x_1 + 11x_2 + 10x_3 = 110 - 4\cdot 15 = 50$.

Die (existierenden drei) Spurpunkte der Ebene F_1 sind die gesuchten Achsenpunkte, also:

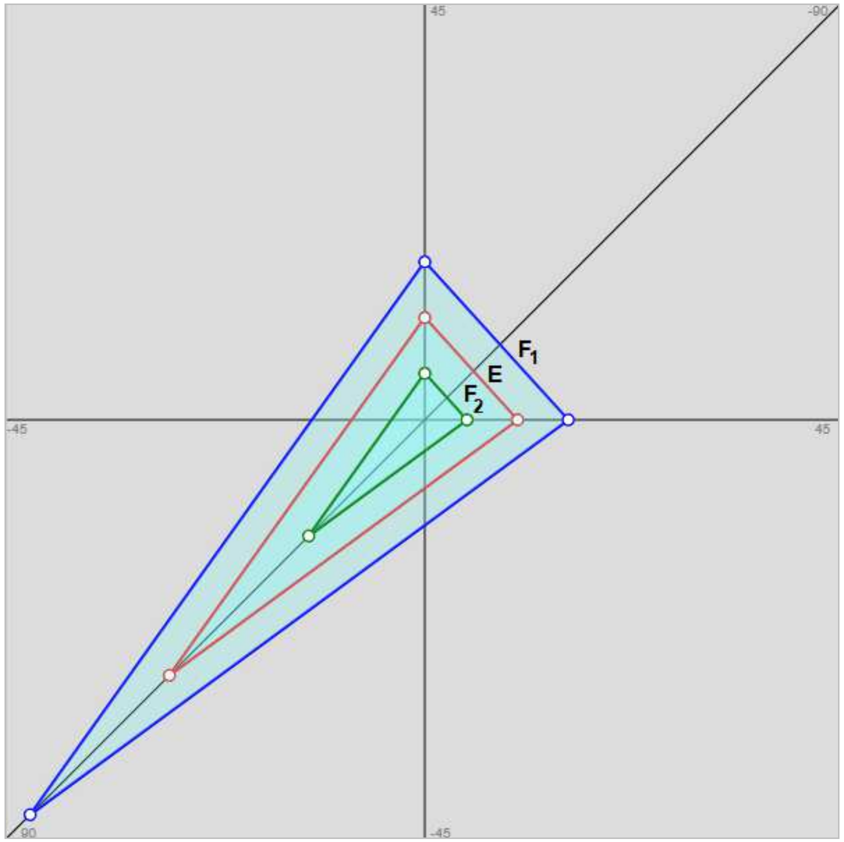
$P_{11}(170/2|0|0) = (85|0|0)$, $P_{12}(0|170/11|0)$, $P_{13}(0|0|170/10) = (0|0|17)$.

Die (existierenden drei) Spurpunkte der Ebene F_2 sind die gesuchten Achsenpunkte, also:
$P_{21}(50/2|0|0) = (25|0|0)$, $P_{22}(0|50/11|0)$, $P_{23}(0|0|50/10) = (0|0|5)$.

III. Insgesamt ergeben sich als Spurpunkte bzw. gesuchte <u>Achsenpunkte</u> mit der gewünschten Abstandseigenschaft:

Koordinatenachsen:					x_1-Achse	x_2-Achse	x_3-Achse
Abstand: D =	4				Spurpunkte/Ebene E:		
Ebene (KF): E:	2	$*x_1$ + 11	$*x_2$ + 10	$*x_3$ = 110	S_1(55 |0|0)	S_2(0| 10 |0)	S_3(0|0| 11)
Zeichenbereich:	x_2-, x_3-Wert: +/- 45	(-> x_1-Wert)			Achsenpunkte ...:		
Ebene (KF): F_1:	2	$*x_1$ + 11	$*x_2$ + 10	$*x_3$ = 170	P_{11}(85 |0|0)	P_{12}(0| 15.454545454 |0)	P_{13}(0|0| 17)
Ebene (KF): F_2:	2	$*x_1$ + 11	$*x_2$ + 10	$*x_3$ = 50	P_{21}(25 |0|0)	P_{22}(0| 4.5454545454 |0)	P_{23}(0|0| 5)
					... mit Abstand D zur Ebene E		

Grafisch aufbereitet stellt sich die folgende Situation dar:



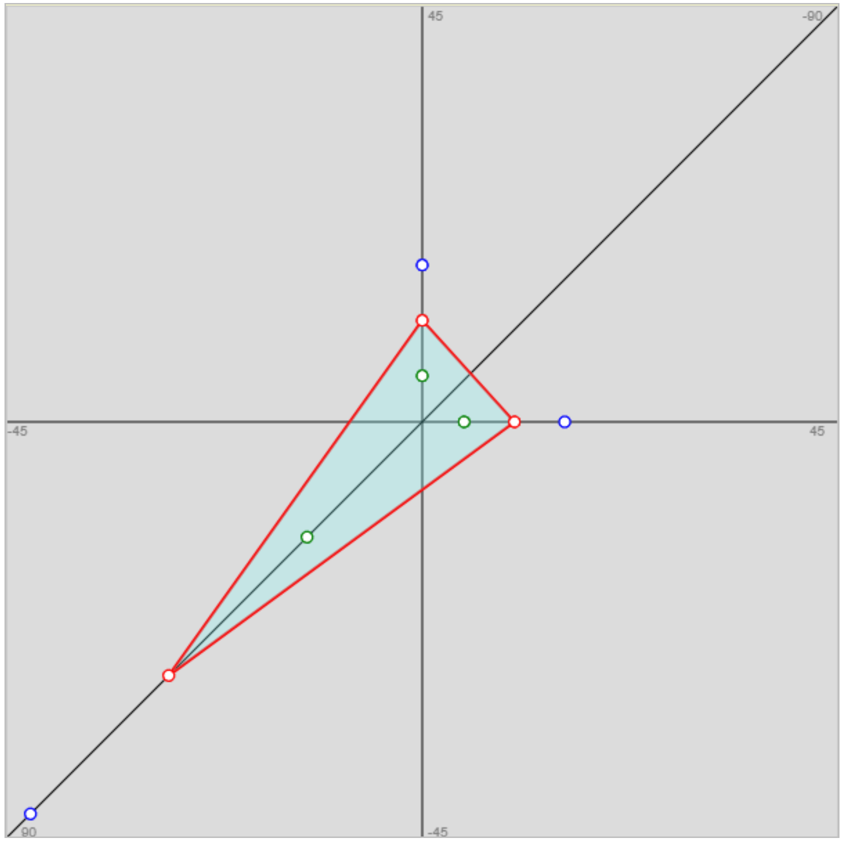
3. Lösung: I. Sind (falls existent) die Punkte $S_1(d/a|0|0)$, $S_2(0|d/b|0)$, $S_3(0|0|d/c)$ die Spurpunkte der Ebene E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$, so ergeben sich die Punkte auf den Achsen des Koordinatensystems, die einen Abstand D von der Ebene E haben, mit dem Betrag $|n^{->}|$ des Normalenvektors $n^{->} = (a\ b\ c)^T$ der Ebene E als <u>Achsenpunkte</u>:

$P_{11}((d+D\cdot|n^{->}|)/a|0|0)$, $P_{21}((d-D\cdot|n^{->}|)/a|0|0)$ (x_1-Achse)
$P_{12}(0|(d+D\cdot|n^{->}|)/b|0)$, $P_{22}(0|(d-D\cdot|n^{->}|)/b|0)$ (x_2-Achse)
$P_{13}(0|0|(d+D\cdot|n^{->}|)/c)$, $P_{23}(0|0|(d-D\cdot|n^{->}|)/c)$ (x_3-Achse).

II. Die Ebene E: $2x_1 + 11x_2 + 10x_3 = 110$ besitzt den Normalenvektor $n^{->} = (2\ 11\ 10)^T$ mit Länge $|n^{->}| = (2^2+11^2+10^2)^{1/2} = \sqrt{225} = 15$. Somit ergeben sich bei Abstand D = 4 die gesuchten Punkte auf den Achsen des Koordinatensystems, die den Abstand 4 von der Ebene E: $2x_1 + 11x_2 + 10x_3 = 110$ haben, als:

$P_{11}((110+4\cdot15)/2|0|0) = (85|0|0)$, $P_{21}((110-4\cdot15)/2|0|0) = (25|0|0)$ (x_1-Achse)
$P_{12}(0|(110+4\cdot15)/11|0) = (0|170/11|0)$, $P_{22}(0|(110-4\cdot15)/11|0) = (0|50/11|0)$ (x_2-Achse)
$P_{13}(0|0|(110+4\cdot15|)/10) = (0|0|17)$, $P_{23}(0|0|(110-4\cdot15)/10) = (0|0|5)$ (x_3-Achse).

Grafisch bedeutet dies:



(LE = Längeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 09.2017 / Aufgabe 452