Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Geraden/Ebenen

Aufgabe: Gegeben seien die Gerade g mit:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sowie das Ebenenbüschel:

$$E_a: (a+1)x_1 + x_2 + (a-1)x_3 = 1$$

für alle reellen Zahlen a.

a) Zeige, dass sich alle Ebenen E_a in einer Schnittgerade s schneiden.

b) Die Gerade g und die Ebene E_3 des Ebenenbüschels schneiden sich im Punkt P. Welche Ebenen E_a des Ebenenbüschels schneiden die Gerade g in einem Punkt Q, damit der Abstand zwischen den Punkten P und Q 12 Längeneinheiten beträgt?

1. Lösung: a) I. Zur Ermittlung der Schnittgeraden s des Ebenenbüschels E_a bestimmen wir zunächst die Schnittgerade zwischen zwei Ebenen, z.B. mit a=1 und a=3 die Schnittgerade zwischen den Ebenen:

E_1: $2x_1 + x_2 = 1$
E_3: $4x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$.

Gemäß den Koordinatengleichungen der vorgegebenen Ebenen E_1 und E_3 ergibt sich lineare Gleichungssystem mit parametrischer Lösung:

Lineares Gleichungssystem:

$+\ 2x_1 + 1x_2 = 1$
$+\ 4x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 1$

Anfangstableau:

x_1	x_2	x_3	R.S.
2	1	0	1
4	1	2	1

1. Schritt: 1*(*2*) - 2*(*1*) /

2	1	0	1
0	-1	2	-1

Ergänzung einer Nullzeile:

2	1	0	1
0	-1	2	-1
0	0	0	0

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_3 = t$
$x_2 = 1 + 2t$
$x_1 = -t$
-> unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems; Parameter ist die reelle Zahl t

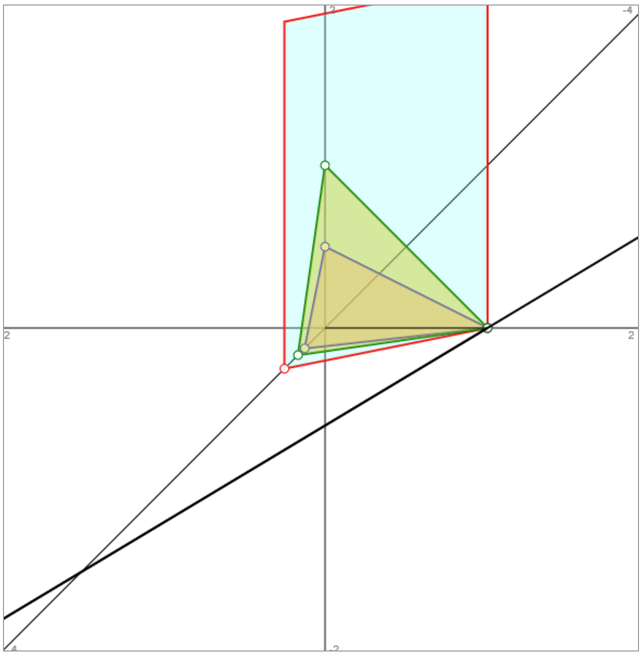
Die gesuchte Schnittgerade s der Ebenen E_1 und E_3 lautet damit:

$$s:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 1+2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

II. In einem 2. Schritt zeigen wir, dass die gefundene <u>Gerade</u> s <u>auf allen Ebenen</u> E_a des Ebenenbüschels liegt. Dann ist die Gerade auch Schnittgerade aller dieser Ebenen. Wir gehen dazu wie folgt vor und schneiden Gerade und beliebige Ebene E_a miteinander:

Gerade s -> $x_1 = -t$, $x_2 = 1 + 2t$, $x_3 = t$ -> Ebene E_a ->
$(a+1)(-t) + (1+2t) + (a–1)t = -at – t +1 + 2t +at – t = 1 = 1$ ->
$1 = 1$ als allgemein gültige Aussage (für jedes reelle t, a)

Die Gerade s ist damit Teil jeder Ebene E_a: $s \subset E_a$ für allen reellen Zahlen a.



b) I. Zur Ermittlung des Punktes P als <u>Schnittpunkt</u> von der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und der Ebene E_3: $4x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$ setzen wir die Komponenten der Geraden in die Ebene ein und errechnen den Parameter t:

Gerade g -> $x_1 = 1 + t$, $x_2 = 3 – 2t$, $x_3 = 2t$ -> Ebene E_3 ->
$4(1+t) + (3-2t) + 2\cdot 2t = 1 \Leftrightarrow 4 +4t + 3 – 2t + 4t = 1 \Leftrightarrow 7 + 6t = 1 \Leftrightarrow 6t = -6 \Leftrightarrow t = -1$.

Den Parameter t = -1 setzen wir in die Geradengleichung ein:

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und erhalten den Schnittpunkt P(0|5|-2).

II. Wollen wir den <u>Schnittpunkt</u> Q von der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und einer beliebigen Ebene E_a des Ebenenbüschels errechnen, gehen wir ähnlich vor:

Gerade g -> $x_1 = 1 + t$, $x_2 = 3 - 2t$, $x_3 = 2t$ -> Ebene E_a ->
(a+1)(1+t) + (3-2t) + (a-1)·2t = 1 ⇔ a + at + 1 + t + 3 – 2t +2at – 2t = 1 ⇔
a + 3at + 4 – 3t = 1 ⇔ 3at – 3t + a + 4 = 1 ⇔ 3t(a-1) + a + 4 = 1 ⇔ 3t(a-1) = -3 – a ⇔
$t = \frac{-3-a}{3(a-1)} = -\frac{a+3}{3(a-1)}$.

Der Schnittpunkt Q ermittelt sich aus:

$$\vec{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{a+3}{3(a-1)} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{a+3}{3(a-1)} \\ 3 + \frac{2a+6}{3(a-1)} \\ -\frac{2a+6}{3(a-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3(a-1)-(a+3)}{3(a-1)} \\ \frac{9(a-1)+(2a+6)}{3(a-1)} \\ -\frac{2a+6}{3(a-1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{3(a-1)} \begin{pmatrix} 2a-6 \\ 11a-3 \\ -2a-6 \end{pmatrix} \text{ ->}$$

$Q\left(\frac{2a-6}{3(a-1)} \mid \frac{11a-3}{3(a-1)} \mid -\frac{2a+6}{3(a-1)}\right)$.

III. Wir bestimmen jetzt die Punkte Q so, dass der Abstand zwischen P und Q 12 LE beträgt, dass also gilt:

$$\left|\vec{PQ}\right| = 12 \quad (*)$$

Mit

$$\vec{PQ} = \frac{1}{3(a-1)} \begin{pmatrix} 2a-6 \\ 11a-3 \\ -2a-6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2a-6}{3(a-1)} \\ \frac{11a-3}{3(a-1)} \\ -\frac{2a+6}{3(a-1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2a-6}{3(a-1)} - 0 \\ \frac{11a-3}{3(a-1)} - 5 \\ -\frac{2a+6}{3(a-1)} + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2a-6}{3(a-1)} \\ \frac{-4a+12}{3(a-1)} \\ \frac{4a-12}{3(a-1)} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{3(a-1)} \begin{pmatrix} 2a-6 \\ -4a+12 \\ 4a-12 \end{pmatrix} = \frac{1}{3(a-1)} \begin{pmatrix} 2(a-3) \\ -4(a-3) \\ 4(a-3) \end{pmatrix} = \frac{2(a-3)}{3(a-1)} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

folgt aus (*):

$$\left| \frac{2(a-3)}{3(a-1)} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = 12 \qquad | \cdot 3|a-1|$$

$$\left| 2(a-3) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = 36\,|a-1| \qquad \text{(Betrag des Vektors bestimmen)}$$

$2|a-3|\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 36|a-1|$

2|a–3|·3 = 36|a-1|	(Zusammenfassen)
6|a–3| = 36|a–1|	| :6
|a–3| = 6|a–1|	(Beträge auflösen)
a–3 = ±6(a–1)	(Fallunterscheidung)

<u>1. Fall</u>:

a–3 = 6(a–1)	(Klammer auflösen)
a–3 = 6a–6	| -a
-3 = 5a–6	| +6
3 = 5a	| :5
a = 3/5 = 0,6	

2. Fall:

$a-3 = -6(a-1)$ (Klammer auflösen)

$a-3 = -6a+6$ | +6a

$7a-3 = 6$ | +3

$7a = 9$ | :7

$a = 9/7$

Die Ebenen sind wegen a = 0,6 bzw. a = 9/7 schon bekannt als:

$E_{0,6}$: $1{,}6x_1 + x_2 - 0{,}4x_3 = 1$ -> $E_{0,6}$: $8x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 5$

$E_{\frac{9}{7}}: \frac{16}{7}x_1 + x_2 + \frac{2}{7}x_3 = 1$ -> $E_{\frac{9}{7}}$: $16x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 7$.

Es fehlen noch die zu errechnenden Punkte Q als Q_1, Q_2 mit:

$$Q_1\left(\frac{2\cdot 0{,}6-6}{3(0{,}6-1)} \middle| \frac{11\cdot 0{,}6-3}{3(0{,}6-1)} \middle| -\frac{2\cdot 0{,}6+6}{3(0{,}6-1)}\right) = Q_1(4|-3|6)$$

$$Q_2\left(\frac{2\cdot\frac{9}{7}-6}{3(\frac{9}{7}-1)} \middle| \frac{11\cdot\frac{9}{7}-3}{3(\frac{9}{7}-1)} \middle| -\frac{2\cdot\frac{9}{7}+6}{3(\frac{9}{7}-1)}\right) = Q_2(-4|13|-10).$$

Die Geradenpunkte Q_1, Q_2 haben vom Geradenpunkt P jeweils den Abstand 12 LE. Weiter sind alle drei Punkte P, Q_1, Q_2 Schnittpunkte der Geraden g mit den Ebenen E_3, $E_{0,6}$ und $E_{9/7}$ des Ebenenbüschels.

2. Lösung: a) Zur Ermittlung der <u>Schnittgeraden</u> s aller Ebenen E_a des Ebenenbüschels bemerken wir, dass – unter der Voraussetzung der Existenz der Schnittgeraden – der Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden auf allen Normalenvektoren der Ebenen E_a senkrecht steht. Wir bilden somit das Kreuzprodukt mit je zwei Normalenvektoren $\vec{n}_a$ und $\vec{n}_\alpha$ der Ebenen E_a und E_α, $a\neq\alpha$:

$$\vec{n}_a \times \vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} a+1 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha+1 \\ 1 \\ \alpha-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha-1)-(a-1) \\ (a-1)(\alpha+1)-(a+1)(\alpha-1) \\ (a+1)-(\alpha+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha-a \\ (a\alpha+a-\alpha-1)-(a\alpha-a+\alpha-1) \\ a-\alpha \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha-a \\ 2a-2\alpha \\ a-\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(a-\alpha) \\ 2(a-\alpha) \\ (a-\alpha) \end{pmatrix} = (a-\alpha)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und daraus, weil alle Kreuzproduktvektoren Vielfache voneinander sind, den Richtungsvektor der somit existierenden Schnittgeraden s als:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir benötigen jetzt noch einen Stützvektor für die Schnittgerade. Der Stützvektor muss Ortsvektor eines Punktes P sein, der auf allen Ebenen E_a liegt. Offensichtlich ist dies beim Punkt P(0|1|0) der Fall mit $P\varepsilon E_a$ für alle a. Damit lautet die von uns gefundene Gleichung der Schnittgeraden s:

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) I. Zur Ermittlung des Punktes P als Schnittpunkt von der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und der Ebene E_3: $4x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$ setzen wir die Komponenten der Geraden in die Ebene ein und errechnen den Parameter t:

Gerade g -> $x_1 = 1 + t$, $x_2 = 3 – 2t$, $x_3 = 2t$ -> Ebene E_3 ->
$4(1+t) + (3-2t) + 2\cdot 2t = 1 \Leftrightarrow 4 + 4t + 3 – 2t + 4t = 1 \Leftrightarrow 7 + 6t = 1 \Leftrightarrow 6t = -6 \Leftrightarrow t = -1$.
Den Parameter t = -1 setzen wir in die Geradengleichung ein:

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und erhalten den Schnittpunkt P(0|5|-2).

II. Gehen wir von der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ aus, so liegen die Punkte Q auf der Geraden 12 LE „vor“ und „hinter“ dem Punkt P(0|5|-2). Dies können wir durch Einführen des Einheitsrichtungsvektors $\vec{u_0} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ so ausdrücken:

$$\vec{OQ} = \vec{OP} \pm 12\vec{u_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \pm 12 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \pm 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten also die zwei weiteren Geradenpunkte Q_1, Q_2 mit:

$$\vec{OQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$ -> $Q_1(4|-3|6)$.

$$\vec{OQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 13 \\ -10 \end{pmatrix}$$ -> $Q_2(-4|13|-10)$

III. Die Geradenpunkte Q_1, Q_2 liegen als Schnittpunkte zwischen Gerade g und gewissen Ebenen E_a des Ebenenbüschels auf den Ebenen E_a, so dass die Parameter a der Ebenen wie folgt zu bestimmen sind:

$Q_1(4|-3|6)$ -> Ebene E_a ->
$(a+1)\cdot 4 – 3 + (a-1)\cdot 6 = 1 \Leftrightarrow 4a + 4 – 3 + 6a – 6 = 1 \Leftrightarrow 10a – 5 = 1 \Leftrightarrow 10a = 6 \Leftrightarrow$
$a = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

$Q_2(-4|13|-10)$ -> Ebene E_a ->
$(a+1)\cdot(-4) + 13 + (a-1)\cdot(-10) = 1 \Leftrightarrow -4a – 4 + 13 – 10a + 10 = 1 \Leftrightarrow -14a + 19 = 1 \Leftrightarrow -14a = -18 \Leftrightarrow$
$a = \frac{18}{14} = \frac{9}{7}$

Die Ebenen, auf denen die Geradenpunkte Q_1, Q_2 liegen, lauten damit:

$E_{0,6}$: $1{,}6x_1 + x_2 – 0{,}4x_3 = 1$ -> $E_{0,6}$: $8x_1 + 5x_2 – 2x_3 = 5$.

$E_{\frac{9}{7}}: \frac{16}{7}x_1 + x_2 + \frac{2}{7}x_3 = 1$ -> $E_{\frac{9}{7}}$: $16x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 7$

(LE = Längeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 04.2020 / Aufgabe 1018