Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Geraden/Ebenen

Aufgabe: Erläutere, wie eine lineare Gleichung erkennen lässt, welche jeweilige Lagebeziehung zwischen einer Ebene und einer Gerade (Gerade als Teil der Ebene, Parallelität, Schneiden) im dreidimensionalen Vektorraum besteht. Die Ebene sei dabei in Koordinatenform gegeben, die Gerade in Parameterform.

Lösung: I. Für eine Ebene E in Koordinatenform mit:

E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

und eine Gerade g in Parameterform mit:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

ermittelt sich die (jeweilige) <u>Lagebeziehung</u> zwischen Ebene und Gerade vermöge der folgenden Vorgehensweise:

Die Parameterform der Geradengleichung wird in ihre Komponenten zerlegt, so dass mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ gilt: $x_1 = p_1 + tu_1$, $x_2 = p_2 + tu_2$, $x_3 = p_3 + tu_3$. Einsetzen von x_1, x_2, x_3 in die Koordinatengleichung der Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ergibt mithin die lineare Gleichung:

$a(p_1 + tu_1) + b(p_2 + tu_2) + c(p_3 + tu_3) = d$ (*)

mit unbekanntem Parameter t. Die Gleichung (*) kann nach t umgestellt werden:

$a(p_1 + tu_1) + b(p_2 + tu_2) + c(p_3 + tu_3) = d$	(Klammern auflösen)
$ap_1 + au_1t + bp_2 + bu_2t + cp_3 + cu_3t = d$	(Zusammenfassen)
$ap_1 + bp_2 + cp_3 + au_1t + bu_2t + cu_3t = d$	(Ausklammern)
$(ap_1 + bp_2 + cp_3) + (au_1 + bu_2 + cu_3)t = d$	$\mid -(ap_1 + bp_2 + cp_3)$
$(au_1 + bu_2 + cu_3)t = d - (ap_1 + bp_2 + cp_3)$ (**).	

Wir beachten, dass es sich bei den Termen $au_1 + bu_2 + cu_3$ und $ap_1 + bp_2 + cp_3$ um die Skalarprodukte von Ebenen-Normalenvektor und Geraden-Richtungsvektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ bzw. von Ebenen-Normalenvektor und Punkt-Ortsvektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ handelt. Es folgt nun:

a) Die Gleichung (**) ist nach t auflösbar, wenn $au_1 + bu_2 + cu_3 \neq 0$ gilt; die Lösung lautet dann:

t = $\dfrac{d - ap_1 - bp_2 - cp_3}{au_1 + bu_2 + cu_3}$,

so dass sich bei Einsetzen von t in die Geradengleichung von g der Schnittpunkt S zwischen Ebene und Gerade ergibt gemäß:

$$\overset{->}{OS} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \frac{d - ap_1 - bp_2 - cp_3}{au_1 + bu_2 + cu_3} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

S($p_1 + \frac{d - ap_1 - bp_2 - cp_3}{au_1 + bu_2 + cu_3} u_1 \mid p_2 + \frac{d - ap_1 - bp_2 - cp_3}{au_1 + bu_2 + cu_3} u_2 \mid p_3 + \frac{d - ap_1 - bp_2 - cp_3}{au_1 + bu_2 + cu_3} u_3$).

b) Gilt $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$ und $d - (ap_1 + bp_2 + cp_3) \neq 0$, so stellt Gleichung (**) einen Widerspruch dar; Ebene und Gerade schneiden sich nicht und sind zueinander parallel.

c) Gilt $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$ und ebenfalls $d - (ap_1 + bp_2 + cp_3) = 0$, so ist Gleichung (**) die Gleichung: 0 = 0, die für alle reellen t lösbar ist (unendlich viele Lösungen). Die Gerade g liegt somit auf (in) der Ebene E.

II. <u>Zusammenfassung</u>: Für eine Ebene E in Koordinatenform mit:

E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

und eine Gerade g in Parameterform mit:

g: $\overset{->}{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

ergibt das Einsetzen der Geradenkomponenten von g in die Ebenengleichung von E die lineare Gleichung:

$a(p_1 + tu_1) + b(p_2 + tu_2) + c(p_3 + tu_3) = d \Leftrightarrow (au_1 + bu_2 + cu_3)t = d - (ap_1 + bp_2 + cp_3)$

mit:

a) $au_1 + bu_2 + cu_3 \neq 0$ => Gleichung: * = (*) =>
Ebene und Gerade schneiden sich im Schnittpunkt mit: {S} = g∩E

b) $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$, $d - (ap_1 + bp_2 + cp_3) \neq 0$ => Gleichung: 0 = * =>
Ebene und Gerade sind parallel: g || E

c) $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$, $d - (ap_1 + bp_2 + cp_3) = 0$ => Gleichung: 0 = 0 =>
Gerade liegt auf (in) der Ebene E: $g \subset E$

(*: reelle Zahl ≠ 0, (*): reelle Zahl ≠ 0 oder = 0).

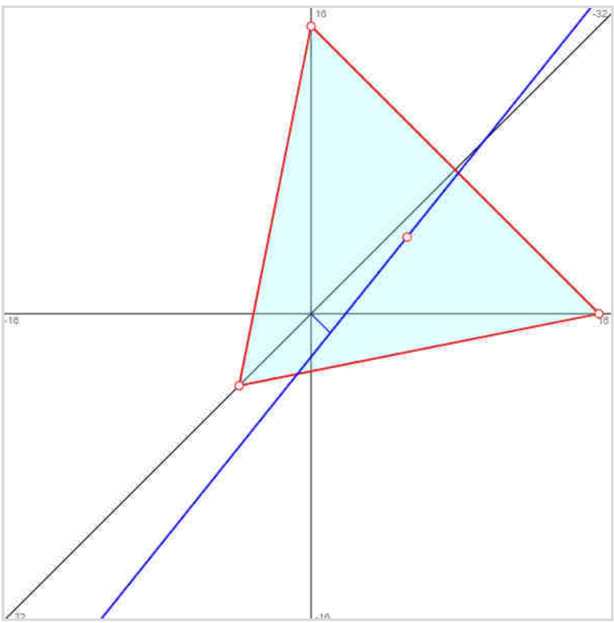
III. Wir fügen noch <u>Beispiele</u> an:

a) Die Gerade g: $\overset{->}{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und die Ebene

E: $2x_1 + x_2 + x_3 = 15$ schneiden sich im Schnittpunkt S(2|6|5) (g∩E = {S}), denn es gilt:

g -> $x_1 = 2$, $x_2 = 2 + 4t$, $x_3 = 5t$ -> E ->
$2 \cdot 2 + (2+4t) + 5t = 15 \Leftrightarrow 6 + 9t = 15 \Leftrightarrow$
$9t = 9 \Leftrightarrow t = 1$ ->

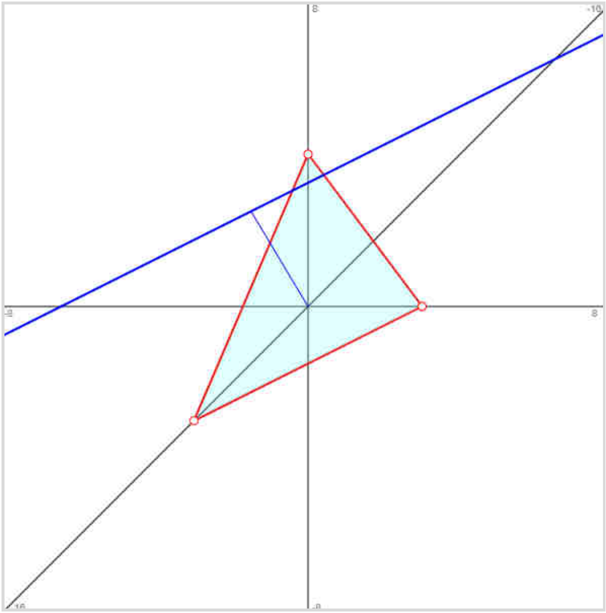
$\overset{->}{OS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ => S(2|6|5).



b) Die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und die Ebene

E: $2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 12$ sind parallel und verschieden (g || h, g ≠ h) auf Grund von:

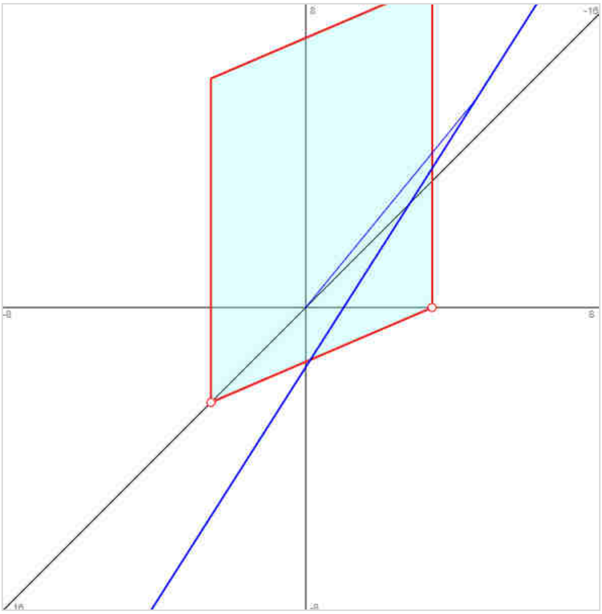
g -> $x_1 = 1 – 2t$, $x_2 = -1 + t$, $x_3 = 3$ -> E ->
$2(1-2t) + 4(-1+t) + 3\cdot 3 = 12$ ⇔
$2 – 4t – 4 + 4t + 9 = 12$ ⇔ $7 = 12$ (falsche Aussage).



c) Die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ liegt auf der

Ebene E: $2x_1 + 3x_2 = 10$ (g ⊂ E) wegen:

g -> $x_1 = -1+3t$, $x_2 = 4 – 2t$, $x_3 = 5 – 4t$ -> E ->
$2(-1+3t) + 3(4-2t) = 10$ ⇔ $-2 + 6t + 12 – 6t = 10$ ⇔
$10 = 10$ (wahre Aussage).



www.michael-buhlmann.de / 04.2022 / Aufgabe 1627