

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Grenzwerte von Funktionen

Aufgabe: Berechne, falls existent, den Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x^4 + x}{x^4 - 5x}$$

1. Lösung: I. Allgemein gilt für Grenzwerte von gebrochen rationalen Funktionen $f(x)$:

Grenzwerte bei gebrochen rationalen Funktionen
Gebrochen rationale Funktion: $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$ ($m, n \in \mathbf{N}_0$)
I. Gebrochen rationale Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich D_f <u>stetig</u> , d.h. es gilt für jedes $x_0 \in D_f$: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$ mit der Übereinstimmung von <u>allgemeinem</u> , <u>linksseitigem</u> , <u>rechtsseitigem Grenzwert</u> mit dem Funktionswert.
II. Daneben existieren auch <u>Grenzwerte für $x \rightarrow \pm\infty$</u> , indem der Bruch der gebrochen rationalen Funktion $f(x)$ durch die höchste Potenz des Nenners gekürzt wird, gemäß: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^{n-m} + a_{n-1} x^{n-1-m} + \dots + a_1 x^{1-m} + a_0 x^{-m}}{b_m + b_{m-1} x^{-1} + \dots + b_1 x^{1-m} + b_0 x^{-m}} =$ $\frac{a_n \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{n-m} + a_{n-1} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{n-1-m} + \dots + a_1 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{1-m} + a_0 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{-m}}{b_m + b_{m-1} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{-1} + \dots + b_1 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{1-m} + b_0 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{-m}} =$ $\begin{cases} \frac{a_n \cdot 0 + a_{n-1} \cdot 0 + \dots + a_1 \cdot 0 + a_0 \cdot 0}{b_m + b_{m-1} \cdot 0 + \dots + b_1 \cdot 0 + b_0 \cdot 0} & = 0 \quad (\text{falls } n < m) \\ \frac{a_n \cdot 1 + a_{n-1} \cdot 0 + \dots + a_1 \cdot 0 + a_0 \cdot 0}{b_m + b_{m-1} \cdot 0 + \dots + b_1 \cdot 0 + b_0 \cdot 0} & = \frac{a_n}{b_m} \quad (\text{falls } n = m). \end{cases}$
Die <u>eigentlichen Werte $x = \pm\infty$</u> sind dabei Randstellen des Definitionsbereichs D_f der Funktion $f(x)$.
III. Die <u>Grenzwerte für $x \rightarrow \pm\infty$</u> existieren auch gemäß der Regel: $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} \quad \begin{cases} \rightarrow 0 & \text{falls } n < m \\ \rightarrow \frac{a_n}{b_m} & \text{falls } n = m \\ \rightarrow \pm\infty & \text{falls } n > m, \end{cases}$ d.h. die Grenzwerte sind reelle Zahlen im Fall, dass die gebrochen rationale Funktion eine waagerechte Asymptote als Grenzkurve besitzt.

Grenzwerte bei gebrochen rationalen Funktionen

II. Das Kürzen des Bruchs $\frac{7x^3 - 2x^4 + x}{x^4 - 5x}$ durch die (gleiche) höchste Potenz x^4 beim (Zähler und)

Nenner führt auf:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x^4 + x}{x^4 - 5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7}{x} - 2 + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{5}{x^3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x} - 2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3}}{1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^3}} = \frac{0 - 2 + 0}{1 - 0} = -2.$$

III. Eine weitere Möglichkeit der Grenzwertbestimmung ist die nachstehende: Die gebrochen rationale Funktion

$f(x) = \frac{7x^3 - 2x^4 + x}{x^4 - 5x}$ besteht als Bruch von Polynomen aus dem Zählerpolynom

$f_1(x) = 7x^3 - 2x^4 + x = -2x^4 + 7x^3 + x$ und dem Nennerpolynom $f_2(x) = x^4 - 5x$. Beide Polynome haben denselben Grad 4, so dass die Funktion $f(x)$ eine waagerechte Asymptote besitzt und für den gesuchten Grenzwert gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x^4 + x}{x^4 - 5x} = \frac{-2}{1} = -2.$$

2. Lösung: I. Allgemein gilt für Grenzwerte einer gebrochen rationalen Funktion $f(x)$:

Grenzwerte bei gebrochen rationalen Funktionen
Gebrochen rationale Funktion: $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$ ($m, n \in \mathbf{N}_0$)
I. Gebrochen rationale Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich D_f <u>stetig</u> , d.h. es gilt für jedes $x_0 \in D_f$: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$
mit der Übereinstimmung von <u>allgemeinem, linksseitigem, rechtsseitigem Grenzwert</u> mit dem Funktionswert.
II. Für alle Randstellen des Definitionsbereichs D_f der gebrochen rationalen Funktion $f(x)$, die auf dem Definitionsbereich auch differenzierbar ist, gilt die <u>Regel von de l'Hospital</u> . undefinierte Ausdrücke vom Typ „ $\frac{0}{0}$ “ oder „ $\frac{\infty}{\infty}$ “ lassen sich im Fall ihrer Existenz damit errechnen vermöge der Identität: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)},$
wobei für die differenzierbaren Funktionen $f_1(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ (Zählerpolynom der gebrochen rationalen Funktion $f(x)$) und $f_2(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ (Nennerpolynom der gebrochen rationalen Funktion $f(x)$) die Bedingung $f_1(x_0) = f_2(x_0) = 0$ für $x_0 \in \mathbf{R}$ oder $x_0 = \pm\infty$ gilt (die uneigentlichen Werte $\pm\infty$ sind also zugelassen).

Grenzwerte bei gebrochen rationalen Funktionen

II. Durch mehrfaches Anwenden der Regel von de l'Hospital (Terme vom Typ „ $\frac{\infty}{\infty}$ “, jeweilige Ableitungen des Zählers und des Nenners) folgt hinsichtlich des zu bestimmenden Grenzwerts:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x^4 + x}{x^4 - 5x} = \lim_{\substack{\infty \\ x \rightarrow \infty}} \frac{21x^2 - 8x^3 + 1}{4x^3 - 5} = \lim_{\substack{\infty \\ x \rightarrow \infty}} \frac{42x - 24x^2}{12x^2} = \lim_{\substack{\infty \\ x \rightarrow \infty}} \frac{42 - 48x}{24x} = \lim_{\substack{\infty \\ x \rightarrow \infty}} \frac{-48}{24} = -2.$$

Natürlich können die bei der Rechnung auftretenden Brüche auch, falls möglich, gekürzt werden; also:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x^4 + x}{x^4 - 5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - 2x^3 + 1}{x^3 - 5} = \lim_{\substack{\infty \\ x \rightarrow \infty}} \frac{14x - 6x^2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14 - 6x}{3x} = \lim_{\substack{\infty \\ x \rightarrow \infty}} \frac{-6}{3} = -2.$$