Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Grenzwerte von Funktionen/L'Hospital-Regel

Aufgabe: Berechne, falls existent, den Grenzwert:

$$\lim_{x->2} \frac{x^{10}-1024}{8-x^3}.$$

Lösung: I. Allgemein gilt für Grenzwerte einer gebrochen rationalen Funktion f(x):

Grenzwerte bei gebrochen rationalen Funktionen
Gebrochen rationale Funktion: $f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1 x + b_0}$ (m, nε$\mathbf{N_0}$)
I. Gebrochen rationale Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich D_f stetig, d.h. es gilt für jedes $x_0 \varepsilon D_f$: $$\lim_{x->x_0} f(x) = \lim_{\substack{x->x_0 \\ x<x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x->x_0 \\ x>x_0}} f(x) = f(x_0)$$ mit der Übereinstimmung von allgemeinem, linksseitigem, rechtsseitigem Grenzwert mit dem Funktionswert.
II. Für alle Randstellen des Definitionsbereichs D_f der gebrochen rationalen Funktion f(x), die auf dem Definitionsbereich auch differenzierbar ist, gilt die Regel von de l'Hospital. Undefinierte Ausdrücke vom Typ „$\frac{0}{0}$" oder „$\frac{\infty}{\infty}$" lassen sich im Fall ihrer Existenz damit errechnen vermöge der Identität: $$\lim_{x->x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x->x_0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)},$$ wobei für die differenzierbaren Funktionen $f_1(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0$ (Zählerpolynom der gebrochen rationalen Funktion f(x)) und $f_2(x)=b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1 x + b_0$ (Nennerpolynom der gebrochen rationalen Funktion f(x)) die Bedingung $f_1(x_0) = f_2(x_0) = 0$ für $x_0 \varepsilon \mathbf{R}$ oder $x_0 = \pm\infty$ gilt (die uneigentlichen Werte $\pm\infty$ sind also zugelassen).

Grenzwerte bei gebrochen rationalen Funktionen

II. Durch einfaches Anwenden der Regel von de l'Hospital (Terme vom Typ „$\frac{0}{0}$", jeweilige Ableitungen des Zählers und des Nenners) folgt hinsichtlich des zu bestimmenden, existierenden Grenzwerts:

$$\lim_{x->2} \frac{x^{10}-1024}{8-x^3} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x->2} \frac{10x^9}{-3x^2} = \lim_{x->2} \frac{10x^7}{-3} = \frac{\lim_{x->2}(10x^7)}{-3} = \frac{10 \cdot \lim_{x->2} x^7}{-3} = \frac{10 \cdot 2^7}{-3} = -\frac{1280}{3}.$$

D.h. die gebrochen rationale Funktion $f(x)=\frac{x^{10}-1024}{8-x^3}$ hat an der Stelle $x_0 = 2$ eine hebbare Unstetigkeitsstelle (Lücke mit stetiger Fortsetzung) mit Lückenwert -1280/3.

www.michael-buhlmann.de / 11.2020 / Aufgabe 1185