

# Mathematikaufgaben

## > Analysis

### > Grenzwerte von Funktionen/L'Hospital-Regel

**Aufgabe:** Berechne, falls existent, den Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} \quad (m, n \in \mathbf{N}).$$

**Lösung:** I. Allgemein gilt für Grenzwerte einer gebrochen rationalen Funktion  $f(x)$ :

Grenzwerte bei gebrochen rationalen Funktionen
Gebrochen rationale Funktion: $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$ ( $m, n \in \mathbf{N}_0$ )
I. Gebrochen rationale Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich $D_f$ <u>stetig</u> , d.h. es gilt für jedes $x_0 \in D_f$ : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$
mit der Übereinstimmung von <u>allgemeinem</u> , <u>linksseitigem</u> , <u>rechtsseitigem Grenzwert</u> mit dem Funktionswert.
II. Für alle Randstellen des Definitionsbereichs $D_f$ der gebrochen rationalen Funktion $f(x)$ , die auf dem Definitionsbereich auch differenzierbar ist, gilt die <u>Regel von de l'Hospital</u> . undefinierte Ausdrücke vom Typ „ $\frac{0}{0}$ “ oder „ $\frac{\infty}{\infty}$ “ lassen sich im Fall ihrer Existenz damit errechnen vermöge der Identität:
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)},$
wobei für die differenzierbaren Funktionen $f_1(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ (Zählerpolynom der gebrochen rationalen Funktion $f(x)$ ) und $f_2(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ (Nennerpolynom der gebrochen rationalen Funktion $f(x)$ ) die Bedingung $f_1(x_0) = f_2(x_0) = 0$ für $x_0 \in \mathbf{R}$ oder $x_0 = \pm\infty$ gilt (die uneigentlichen Werte $\pm\infty$ sind also zugelassen).

#### Grenzwerte bei gebrochen rationalen Funktionen

II. Durch einfaches Anwenden der Regel von de l'Hospital (Terme vom Typ „ $\frac{0}{0}$ “, jeweilige Ableitungen des Zählers und des Nenners) folgt hinsichtlich des zu bestimmenden, existierenden Grenzwerts:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ \frac{0}{0}}} \frac{nx^{n-1}}{mx^{m-1}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (nx^{n-1})}{\lim_{x \rightarrow 1} (mx^{m-1})} = \frac{n \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x^{n-1}}{m \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x^{m-1}} = \frac{n \cdot 1^{n-1}}{m \cdot 1^{m-1}} = \frac{n \cdot 1}{m \cdot 1} = \frac{n}{m}.$$