Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Grenzwerte von Funktionen/Unstetigkeit

Aufgabe: Zeige: Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ist an der Stelle x = 0 unstetig.

Lösung: I. Eine Funktion f: D_f -> **R** mit y=f(x) ist <u>stetig</u> an einer Stelle $x_0 \varepsilon D_f$, wenn für jedes ε>0 ein δ>0 existiert, so dass aus $|x – x_0| < \delta$ die Beziehung

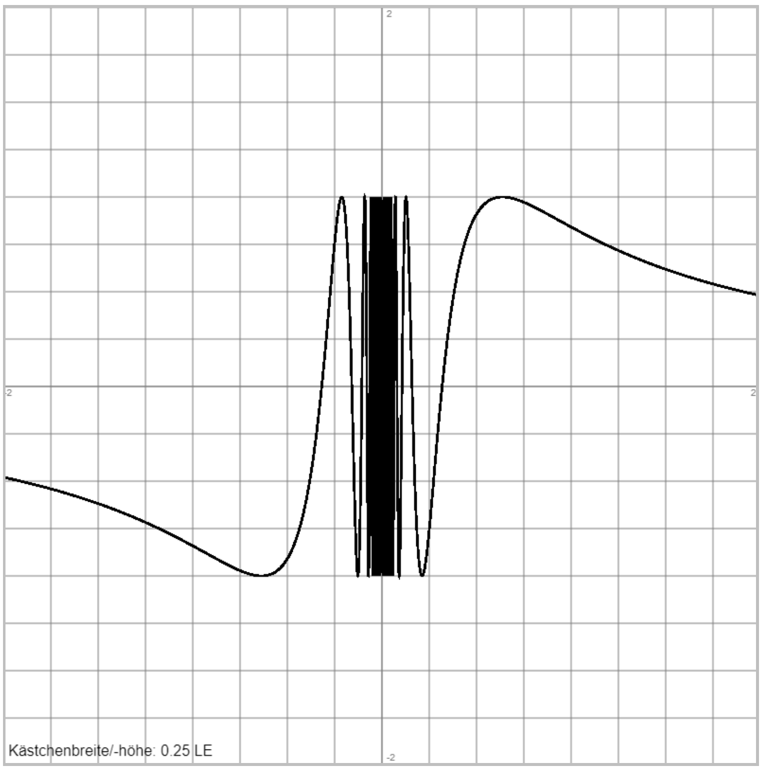
$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

folgt, d.h. wenn gilt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Funktionsgrenzwert, linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert müssen im Fall der Stetigkeit übereinstimmen und gleich dem (somit an der Stelle x_0) definierten Funktionswert sein. Existiert der Funktionsgrenzwert, so auch der links- und rechtsseitige Grenzwert, die dann gleich sind. Existieren der links- und rechtsseitige Grenzwert und sind gleich, so existiert auch der Gesamtgrenzwert und es gilt Gleichheit. Das logische Gegenteil von Stetigkeit an einer Stelle x_0 ist Unstetigkeit.

II. Die Funktion $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, x≠0, besitzt den folgenden <u>Graphen</u>:



III. Um die Unstetigkeit der Funktion f(x) an der Stelle $x_0 = 0$ nachzuweisen, betrachten wir zunächst die Folge der Stellen x_n mit $f(x_n) = 1$. Es gilt:

$$f(x_n) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{4n\pi}{2} = \frac{\pi + 4n\pi}{2} = \frac{(4n+1)\pi}{2} = (4n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$x_n = \frac{1}{(4n+1)\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{(4n+1)\pi}$$, n ganzzahlig.

Die Folge $(x_n)_{n\varepsilon\mathbf{N}}$ ist konvergent und eine Nullfolge (mit Grenzwert 0); d.h. für jedes $\delta > 0$ findet sich ein n_0, so dass $|x_n| < \delta$ für alle $n>n_0$ gilt. Hingegen lässt sich kein beliebig kleines $\varepsilon>0$ finden, so dass $|f(x_n)–f(x_0)| < \varepsilon$ gilt. Es gilt vielmehr wegen $f(x_n) = 1$ und $f(x_0) = f(0) = 0$:

$$|\, f(x_n) - f(x_0)\,| = |\, f(x_n) - f(0)\,| = |\,1 - 0\,| = 1,$$

so dass die Folge $(x_n)_{n\varepsilon\mathbf{N}}$ eine Folge von Funktionswerten $(f(x_n))_{n\varepsilon\mathbf{N}}$ erzeugt, deren Grenzwert 1 ist. Damit gibt es $\varepsilon>0$ mit $\varepsilon\leq1$, so dass für jedes $\delta > 0$ es ein x_n gibt mit: $|f(x_n)–f(x_0)| \geq \varepsilon$. Dies ist aber die Negierung der Definition von Stetigkeit. Die Unstetigkeit von f(x) ist damit nachgewiesen und lässt sich im Übrigen für alle Folgen $(x_n)_{n\varepsilon\mathbf{N}}$ mit $f(x_n) = a$, $-1\leq a\leq1$, $a\neq0$, nachweisen.

www.michael-buhlmann.de / 12.2020 / Aufgabe 1200