Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Grenzwerte von Funktionen/L'Hospital-Regel

Aufgabe: Berechne den Grenzwert:

$$\lim_{x->0} \frac{(e^{2x}-1)^{20}}{(1-\cos(2x))^{10}}.$$

Lösung: I. Undefinierte Ausdrücke vom Typ „$\frac{0}{0}$“ oder „$\frac{\infty}{\infty}$“ lassen sich im Rahmen der Analysis nach der Regel von de l'Hospital errechnen vermöge der Identität:

$$\lim_{x->x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x->x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

wobei für zwei differenzierbare Funktionen f(x), g(x) die Bedingung $f(x_0) = g(x_0) = 0$ oder $= \pm\infty$ für $x_0 \varepsilon \mathbf{R}$ oder $x_0 = \pm\infty$ gilt. Die Regel von de l'Hospital lässt sich auch auf unbestimmte Ausdrücke vom Typ „$0\cdot\infty$“, „$\infty - \infty$“, „1^{∞}“, „0^0“, „∞^0“ anwenden:

Unbestimmte Ausdrücke	
Typ	*Termumformung*
$0\cdot\infty$	$f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$
$\infty-\infty$	$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} = \frac{g(x)-f(x)}{f(x)g(x)} = f(x)\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right) = \frac{1-\frac{g(x)}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$
0^0, 1^∞, ∞^0	$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$

Unbestimmte Ausdrücke

II. Der Grenzwert $\lim_{x->0} \frac{(e^{2x}-1)^{20}}{(1-\cos(2x))^{10}}$ ist vom Typ $\frac{0}{0}$, so dass mit einigen Umformungen, den Grenzwertsätzen und der Anwendung der Regel von de l'Hospital folgt:

$$\lim_{x->0} \frac{(e^{2x}-1)^{20}}{(1-\cos(2x))^{10}} = \lim_{x->0} \frac{\left((e^{2x}-1)^2\right)^{10}}{(1-\cos(2x))^{10}} = \lim_{x->0}\left(\frac{(e^{2x}-1)^2}{1-\cos(2x)}\right)^{10} = \left(\lim_{x->0} \frac{(e^{2x}-1)^2}{1-\cos(2x)}\right)^{10} \underset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\left(\lim_{x->0} \frac{2(e^{2x}-1)\cdot 2e^{2x}}{2\sin(2x)}\right)^{10} = \left(\lim_{x->0} \frac{2e^{2x}(e^{2x}-1)}{\sin(2x)}\right)^{10} = \left(\lim_{x->0} \frac{2e^{4x}-2e^{2x}}{\sin(2x)}\right)^{10} \underset{\frac{0}{0}}{=} \left(\lim_{x->0} \frac{8e^{4x}-4e^{2x}}{2\cos(2x)}\right)^{10} =$$

$$\left(\frac{8e^0-4e^0}{2\cos(0)}\right)^{10} = \left(\frac{8-4}{2}\right)^{10} = 2^{10} = 1024.$$

www.michael-buhlmann.de / 12.2020 / Aufgabe 1212