

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Grenzwerte von Funktionen

Aufgabe: Berechne den Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{200} \sin^{20} x}{\left(\sin x - x + \frac{x^3}{6} \right)^{44}}.$$

Lösung: I. Wir betrachten die Potenzreihenentwicklung der Sinusfunktion:

$$\sin(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} \quad (*).$$

II. Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{200} \sin^{20} x}{\left(\sin x - x + \frac{x^3}{6} \right)^{44}}$ vom Typ „ $\frac{0}{0}$ “ kann dann wie folgt umgeformt und be-

rechnet werden:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{200} \sin^{20} x}{\left(\sin x - x + \frac{x^3}{6} \right)^{44}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^{10} \sin x)^{20}}{\left(\sin x - x + \frac{x^3}{6} \right)^{44}} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x^{10} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} \right)^{20}}{\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} - x + \frac{x^3}{6} \right)^{44}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x^{10} \cdot x \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i} \right)^{20}}{\left(\sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} \right)^{44}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x^{11} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i} \right)^{20}}{\left(x^5 \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i-4} \right)^{44}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^{11})^{20} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i} \right)^{20}}{(x^5)^{44} \left(\sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i-4} \right)^{44}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{220} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i} \right)^{20}}{x^{220} \left(\sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i-4} \right)^{44}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i} \right)^{20}}{\left(\sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i-4} \right)^{44}} = \frac{\left(\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i} \right)^{20}}{\left(\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i-4} \right)^{44}} = \\ &= \frac{1^{20}}{\left(\frac{1}{5!} \right)^{44}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{120} \right)^{44}} = 120^{44}. \end{aligned}$$