Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Grenzwerte von Funktionen

Aufgabe: Berechne den Grenzwert:

$$\lim_{x->\infty} \frac{(x^2-1)\sin^2 x + (x^2+1)\cos^2 x}{x^2+x+1}.$$

Lösung: I. Allgemein gilt für Grenzwerte von gebrochen rationalen Funktionen f(x):

Grenzwerte bei gebrochen rationalen Funktionen
Gebrochen rationale Funktion: $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0}$ (m, nε$\mathbf{N_0}$)
I. Gebrochen rationale Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich D_f stetig, d.h. es gilt für jedes $x_0 \varepsilon D_f$: $$\lim_{x->x_0} f(x) = \lim_{\substack{x->x_0 \\ x<x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x->x_0 \\ x>x_0}} f(x) = f(x_0)$$ mit der Übereinstimmung von allgemeinem, linksseitigem, rechtsseitigem Grenzwert mit dem Funktionswert.
II. Daneben existieren auch Grenzwerte für x -> ±∞, indem der Bruch der gebrochen rationalen Funktion f(x) durch die höchste Potenz des Nenners gekürzt wird, gemäß: $$\lim_{x->\pm\infty} f(x) = \lim_{x->\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0} = \lim_{x->\pm\infty} \frac{a_n x^{n-m} + a_{n-1}x^{n-1-m} + ... + a_1 x^{1-m} + a_0 x^{-m}}{b_m + b_{m-1}x^{-1} + ... + b_1 x^{1-m} + b_0 x^{-m}} =$$ $$\frac{a_n \lim_{x->\pm\infty} x^{n-m} + a_{n-1} \lim_{x->\pm\infty} x^{n-1-m} + ... + a_1 \lim_{x->\pm\infty} x^{1-m} + a_0 \lim_{x->\pm\infty} x^{-m}}{b_m + b_{m-1} \lim_{x->\pm\infty} x^{-1} + ... + b_1 \lim_{x->\pm\infty} x^{1-m} + b_0 \lim_{x->\pm\infty} x^{-m}} =$$ $$\begin{cases} \frac{a_n \cdot 0 + a_{n-1} \cdot 0 + ... + a_1 \cdot 0 + a_0 \cdot 0}{b_m + b_{m-1} \cdot 0 + ... + b_1 \cdot 0 + b_0 \cdot 0} = 0 & \text{(falls n < m)} \\ \frac{a_n \cdot 1 + a_{n-1} \cdot 0 + ... + a_1 \cdot 0 + a_0 \cdot 0}{b_m + b_{m-1} \cdot 0 + ... + b_1 \cdot 0 + b_0 \cdot 0} = \frac{a_n}{b_m} & \text{(falls n = m).} \end{cases}$$ Die uneigentlichen Werte x = ±∞ sind dabei Randstellen des Definitionsbereichs D_f der Funktion f(x).
III. Die Grenzwerte für x -> ±∞ existieren auch gemäß der Regel: $$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0} \begin{cases} -> 0 & \text{falls n < m} \\ -> \frac{a_n}{b_m} & \text{falls n = m} \\ -> \pm\infty & \text{falls n > m,} \end{cases}$$ d.h. die Grenzwerte sind reelle Zahlen im Fall, dass die gebrochen rationale Funktion eine waagerechte Asymptote als Grenzkurve besitzt.

Grenzwerte bei gebrochen rationalen Funktionen

Es folgt noch: Ist $f(x) = \frac{c(x)}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0}$ mit c(x) als beschränkter Funktion, d.h.: |c(x)| ≤ c für ein gewisses positives reelles c, dann gilt:

$$\lim_{x->\pm\infty} f(x) = \lim_{x->\pm\infty} \frac{c(x)}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0} = \lim_{x->\pm\infty} \frac{c}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0} = 0.$$

II. Der Grenzwert $\lim\limits_{x->\infty} \frac{(x^2-1)\sin^2 x + (x^2+1)\cos^2 x}{x^2+x+1}$ lässt sich wie folgt berechnen:

$$\lim_{x->\infty} \frac{(x^2-1)\sin^2 x + (x^2+1)\cos^2 x}{x^2+x+1} = \lim_{x->\infty} \frac{x^2(\sin^2 x + \cos^2 x) - \sin^2 x + \cos^2 x}{x^2+x+1} =$$

$$\lim_{x->\infty} \frac{x^2 - \sin^2 x + \cos^2 x}{x^2+x+1} = \lim_{x->\infty} \frac{x^2+1-2\sin^2 x}{x^2+x+1} = \lim_{x->\infty} \frac{x^2+1}{x^2+x+1} - \lim_{x->\infty} \frac{2\sin^2 x}{x^2+x+1} = .$$

$$\lim_{x->\infty} \frac{x^2+1}{x^2+x+1} - \lim_{x->\infty} \frac{2}{x^2+x+1} = 1 - 0 = 1$$

auf Grund der trigonometrischen Beziehung: $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$, der Grenzwertregeln für gebrochen rationale Funktionen und der Abschätzung: $|2\cdot\sin^2(x)| \le 2$ ($<= -1 \le \sin(x) \le 1$).

www.michael-buhlmann.de / 02.2021 / Aufgabe 1310