Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Grenzwerte von Funktionen

Aufgabe: Berechne, falls vorhanden, den Grenzwert:

$$\lim_{x->\infty} \frac{5x^3 \cos x - 1}{2x^3 + 1}.$$

Lösung: I. Die Nichtexistenz eines Grenzwertes lässt sich nachweisen, wenn für zwei Zahlenfolgen $(a_n)_{n\varepsilon\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\varepsilon\mathbf{N}}$ hier mit a_n, b_n -> +∞ die Folgen $(f(a_n))_{n\varepsilon\mathbf{N}}$, $(f(b_n))_{n\varepsilon\mathbf{N}}$ unterschiedliche Grenzwerte oder die Nichtexistenz eines Grenzwertes aufweisen.

II. Allgemein gilt für Grenzwerte von gebrochen rationalen Funktionen f(x):

Grenzwerte bei gebrochen rationalen Funktionen
Gebrochen rationale Funktion: $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0}$ (m, $n\varepsilon\mathbf{N_0}$)
I. Gebrochen rationale Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich D_f stetig, d.h. es gilt für jedes $x_0 \varepsilon D_f$: $$\lim_{x->x_0} f(x) = \lim_{\substack{x->x_0 \\ x<x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x->x_0 \\ x>x_0}} f(x) = f(x_0)$$ mit der Übereinstimmung von allgemeinem, linksseitigem, rechtsseitigem Grenzwert mit dem Funktionswert.
II. Daneben existieren auch Grenzwerte für x -> ±∞, indem der Bruch der gebrochen rationalen Funktion f(x) durch die höchste Potenz des Nenners gekürzt wird, gemäß: $$\lim_{x->\pm\infty} f(x) = \lim_{x->\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0} = \lim_{x->\pm\infty} \frac{a_n x^{n-m} + a_{n-1}x^{n-1-m} + ... + a_1 x^{1-m} + a_0 x^{-m}}{b_m + b_{m-1}x^{-1} + ... + b_1 x^{1-m} + b_0 x^{-m}} =$$ $$\frac{a_n \lim_{x->\pm\infty} x^{n-m} + a_{n-1} \lim_{x->\pm\infty} x^{n-1-m} + ... + a_1 \lim_{x->\pm\infty} x^{1-m} + a_0 \lim_{x->\pm\infty} x^{-m}}{b_m + b_{m-1} \lim_{x->\pm\infty} x^{-1} + ... + b_1 \lim_{x->\pm\infty} x^{1-m} + b_0 \lim_{x->\pm\infty} x^{-m}} =$$ $$\begin{cases} \frac{a_n \cdot 0 + a_{n-1} \cdot 0 + ... + a_1 \cdot 0 + a_0 \cdot 0}{b_m + b_{m-1} \cdot 0 + ... + b_1 \cdot 0 + b_0 \cdot 0} = 0 & \text{(falls n < m)} \\ \frac{a_n \cdot 1 + a_{n-1} \cdot 0 + ... + a_1 \cdot 0 + a_0 \cdot 0}{b_m + b_{m-1} \cdot 0 + ... + b_1 \cdot 0 + b_0 \cdot 0} = \frac{a_n}{b_m} & \text{(falls n = m).} \end{cases}$$ Die uneigentlichen Werte x = ±∞ sind dabei Randstellen des Definitionsbereichs D_f der Funktion f(x).
III. Die Grenzwerte für x -> ±∞ existieren auch gemäß der Regel: $$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0} \quad \begin{cases} -> 0 & \text{falls n < m} \\ -> \frac{a_n}{b_m} & \text{falls n = m} \\ -> \pm\infty & \text{falls n > m,} \end{cases}$$ d.h. die Grenzwerte sind reelle Zahlen im Fall, dass die gebrochen rationale Funktion eine waagerechte Asymptote als Grenzkurve besitzt.

Grenzwerte bei gebrochen rationalen Funktionen

III. Für den Grenzwert $\lim\limits_{x->\infty} \frac{5x^3 \cos x - 1}{2x^3 + 1}$ folgt dessen <u>Nichtexistenz</u> aus:

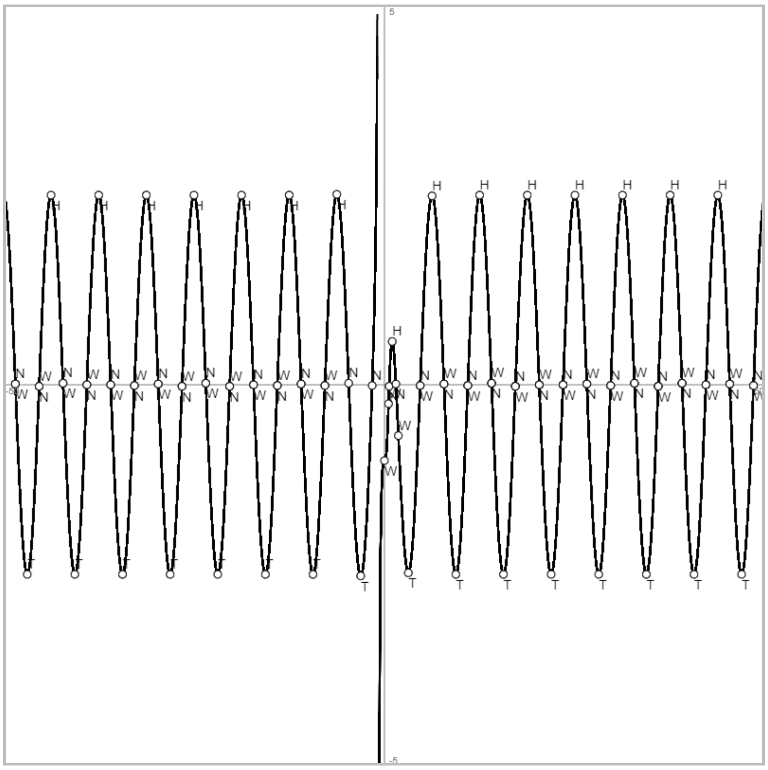
$$a_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \to +\infty \Rightarrow f(a_n) = \frac{5(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)^3 \cos(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) - 1}{2(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)^3 + 1} \underset{\cos(\frac{\pi}{2}+2n\pi)=1}{=}$$

$$\frac{5(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)^3 - 1}{2(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)^3 + 1} = \frac{5 \cdot 8\pi^3 n^3 + ... - 1}{2 \cdot 8\pi^3 n^3 + ... + 1} \to \frac{5}{2}$$

$$b_n = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi \to +\infty \Rightarrow f(b_n) = \frac{5(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi)^3 \cos(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi) - 1}{2(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi)^3 + 1} \underset{\cos(\frac{3\pi}{2}+2n\pi)=-1}{=}$$

$$\frac{-5(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi)^3 - 1}{2(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi)^3 + 1} = \frac{-5 \cdot 8\pi^3 n^3 + ... - 1}{2 \cdot 8\pi^3 n^3 + ... + 1} \to -\frac{5}{2}$$

auf Grund derselben höchsten Potenzen n^3 in Zähler und Nenner des jeweiligen Bruchs gemäß den Grenzwertregeln für gebrochen rationale Funktionen. Da $\lim\limits_{n->\infty} f(a_n) = \frac{5}{2} \neq -\frac{5}{2} = \lim\limits_{n->\infty} f(b_n)$ gilt, existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x->\infty} \frac{5x^3 \cos x - 1}{2x^3 + 1}$ nicht.



Funktion f(x) = (5x³cos(x)-1)/(2x³+1), -50≤x≤50

www.michael-buhlmann.de / 02.2021 / Aufgabe 1311