Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Grenzwerte von Funktionen/L'Hospital-Regel

Aufgabe: Berechne den Grenzwert:

$$\lim_{x->0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right).$$

Lösung: I. Undefinierte Ausdrücke vom Typ „$\frac{0}{0}$" oder „$\frac{\infty}{\infty}$" lassen sich im Rahmen der Analysis nach der Regel von de l'Hospital errechnen vermöge der Identität:

$$\lim_{x->x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x->x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

wobei für zwei differenzierbare Funktionen f(x), g(x) die Bedingung $f(x_0) = g(x_0) = 0$ oder $= \pm\infty$ für $x_0 \varepsilon \mathbf{R}$ oder $x_0 = \pm\infty$ gilt. Die Regel von de l'Hospital lässt sich auch auf unbestimmte Ausdrücke vom Typ „$0\cdot\infty$", „$\infty - \infty$", „1^∞", „0^0", „∞^0" anwenden:

Unbestimmte Ausdrücke	
Typ	*Termumformung*
$0\cdot\infty$	$f(x)g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$
$\infty-\infty$	$\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{g(x)}=\frac{g(x)-f(x)}{f(x)g(x)}=f(x)\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right)=\frac{1-\frac{g(x)}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$
0^0, 1∞, ∞^0	$f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$

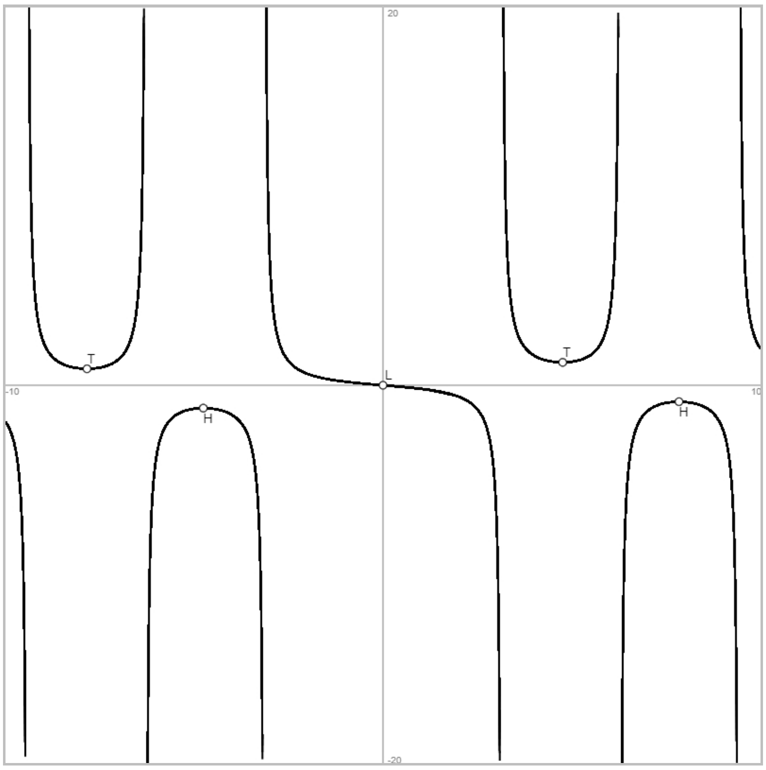
Unbestimmte Ausdrücke

II. Der Grenzwert $\lim_{x->0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$ ist vom Typ ∞-∞, so dass mit einigen Umformungen und der Anwendung der Regel von de l'Hospital folgt:

$$\lim_{x->0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)\underset{\infty-\infty}{=}\lim_{x->0}\left(\frac{\sin x}{x\sin x}-\frac{x}{x\sin x}\right)=\lim_{x->0}\left(\frac{\sin x-x}{x\sin x}\right)\underset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x->0}\left(\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}\right)\underset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\lim_{x->0}\left(\frac{\sin x}{\cos x+\cos x+x\sin x}\right)=\lim_{x->0}\left(\frac{\sin x}{2\cos x+x\sin x}\right)=\frac{\sin 0}{2\cdot\cos 0+0\cdot\sin 0}=\frac{0}{2+0}=0.$$

Die Funktion f(x) = $\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}$ besitzt also an der Stell x = 0 eine stetig hebbare Lücke L(0|0) mit Lückenwert 0.



www.michael-buhlmann.de / 02.2021 / Aufgabe 1313