

Mathematikaufgaben

> Vektorrechnung

> Geraden

Aufgabe: Wie liegen die zwei Geraden g und h mit:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

zueinander?

Lösung: I. Allgemein kann hinsichtlich der Lage zwischen zwei Geraden g und h unterschieden werden:

- a) Geraden sind identisch ($g=h$);
- b) Geraden schneiden sich im Schnittpunkt S ($g \cap h = \{S\}$);
- c) Geraden schneiden sich nicht und sind parallel ($g \parallel h$);
- d) Geraden schneiden sich nicht und sind windschief (g, h windschief).

Dabei gilt folgende Vorgehensweise:

Schritt 1: Schnittpunktberechnung ($g \cap h$): Gleichsetzen der Geradengleichungen von g und h führt zu einem linearen Gleichungssystem mit drei Gleichungen und zwei Unbekannten. Es gilt:

- a) Das Gleichungssystem ist mehrdeutig lösbar; die Geraden sind identisch ($g=h$).
- b) Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar; die Geraden schneiden sich im Schnittpunkt S.
- c) Das Gleichungssystem ist nicht lösbar; die Geraden schneiden sich nicht; weiter mit Schritt 2.

Schritt 2: Untersuchung der Geraden auf Parallelität ($g \parallel h$): Im Falle der Parallelität ist die Vielfachheit der Richtungsvektoren der Geraden g und h gegeben. Sind die Richtungsvektoren nicht Vielfache voneinander, so sind die Geraden g und h windschief.

II. Gleichsetzen der Geradengleichungen ($g \cap h$) ergibt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$-2s-t = -4, s+3t = 2, s-2t = 2 \Leftrightarrow$$

$$-2s-t = -4, s = 2-3t, (2-3t)-2t = 2 \Leftrightarrow$$

$$-2s-t = -4, s = 2-3t, -5t = 0 \Leftrightarrow$$

$$-2s-t = -4, s = 2-3t, t=0 \Leftrightarrow$$

$$-2s=-4, s=2, t=0 \Leftrightarrow$$

$$s=2, t=0$$

Die Geraden schneiden sich also, der Schnittpunkt S errechnet sich entweder durch Einsetzen von s in die Geradengleichung von g oder von t in die Geradengleichung von h z.B. als:

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ also } S(-3|0|2).$$

www.michael-buhlmann.de / 02.2015 / Aufgabe 95