Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Geraden

Aufgabe: Berechne den Schnittpunkt der zwei Geraden g und h mit:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Lösung: I. Allgemein führt bei der Schnittpunktberechnung zwischen zwei Geraden g und h im dreidimensionalen Vektorraum (g∩h) das Gleichsetzen der Geradengleichungen zu einem linearen Gleichungssystem mit drei Gleichungen und den zwei Geradenparametern als Unbekannten. Im Fall der Existenz des Schnittpunktes S ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar; die Geraden schneiden sich in der Tat im Schnittpunkt S.

Für das Lösen von linearen Gleichungssystemen gilt die folgende Vorgehensweise gemäß dem sog. Gauß-Algorithmus:

Zur Lösung komplexer linearer Gleichungssysteme verwendet man den Gaußschen Algorithmus, d.h. folgende Vorgehensweise: 1) Das lineare Gleichungssystem aus Gleichungen und Unbekannten wird in Matrixdarstellung umgeschrieben; eine Gleichung entspricht eine Zeile, einer Unbekannten einer Spalte in der Matrix, die rechte (Zahlen-) Seite des Gleichungssystems bildet die letzte Spalte der Matrix; die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten kann auch verschieden sein. 2) Beim Gaußschen Algorithmus werden, beginnend vom Anfangstableau, Nullen unter der Hauptdiagonalen wie folgt erzeugt: 1. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 1. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 2; ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 2, so werden alle Matrixelemente in Zeile 2 mit a multipliziert, alle Matrixelemente in Zeile 1 mit b multipliziert und Produkt minus Produkt als neue Matrixelemente der Zeile 2 gebildet (Vorgehensweise (*), auch unter Beachtung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen a und b). Ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*) usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 2. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 2. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 3; ist a das zweite Element in Zeile 2 und b das zweite Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*), und dies weiter für Zeile 4 usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 3. Schritt usw., bis die letzte Matrixspalte erreicht ist. Es entsteht dadurch das Endtableau des Algorithmus, das auf die Art der Lösungen und die Lösungen des linearen Gleichungssystems hinweist. Im Fall der eindeutigen Lösung ergibt sich: 3) Ist im Endtableau des Gaußschen Algorithmus die Dreiecksgestalt (Stufenform) gegeben, so gilt für die Variable z der letzten Spalte mit dem dazugehörenden Matrixelement a≠0 und dem Element b der rechten Seite: az = b ⇔ z = b/a. / Für die Variable y der vorletzten Spalte mit dem dazugehörenden Matrixelement c≠0, dem Matrixelement d und dem Element e der rechten Seite gilt: cy+dz = e ⇔ cy = e – db/a ⇔ y = e/c – db/(ac) / usw., bis die Variable der ersten Matrixspalte errechnet ist. 4) Die Lösungsmenge besteht in diesem Fall – wegen der Eindeutigkeit der Lösung – aus einem Zahlentupel, also: **L** = {(l|m|…|t)} mit reellen Zahlen l, m, … t.

Im Fall der Schnittpunktberechnung zwischen zwei Geraden ergibt sich mit dem Gauß-Algorithmus eine Endtabelle, in der die letzte Zeile nur aus Nullen besteht, was die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems bedeutet. Das Ausrechnen eines Geradenparameters gemäß der 2. Zeile der Endtabelle reicht dann zur Ermittlung des Schnittpunktes, wenn man den ausgerechneten Parameter in die entsprechende Geradengleichung einsetzt.

II. Gleichsetzen der Geradengleichungen von g und h (g∩h) ergibt:

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix},$$

so dass das Subtrahieren des Richtungsvektors $s\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ der Geraden h (rechte Seite der Vektorgleichung, Multiplikation der Vektorkomponenten mit -1) und das Zusammenfassen der Stützvektoren durch Subtraktion $\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$ des Stützvektors der Geraden g (linke Seite der Vektorgleichung) auf:

$$r\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\0\\-5\end{pmatrix}$$

führt. Wir wandeln nun die vorstehende Vektorgleichung in ein lineares Gleichungssystem um, indem wir die Vektorkomponenten tabellarisch zusammenfassen:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} r & s \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c}1 & -2 & -4\\-3 & 2 & 0\\2 & -3 & -5\end{array}\right). \end{array}$$

III. Zur <u>Lösung des linearen Gleichungssystems</u> wird der Gauß-Algorithmus verwendet. Es greifen damit die nachstehenden Umformungen:

<u>Anfangstableau</u>:

r *s* | *R.S.*
1 -2 | -4
-3 2 | 0
2 -3 | -5

<u>1. Schritt</u>: 1*(*2*) + 3*(*1*) / 1*(*3*) - 2*(*1*)

1 -2 | -4
0 -4 | -12
0 1 | 3

<u>2. Schritt</u>: 4*(*3*) + 1*(*2*)

1 -2 | -4
0 -4 | -12
0 0 | 0

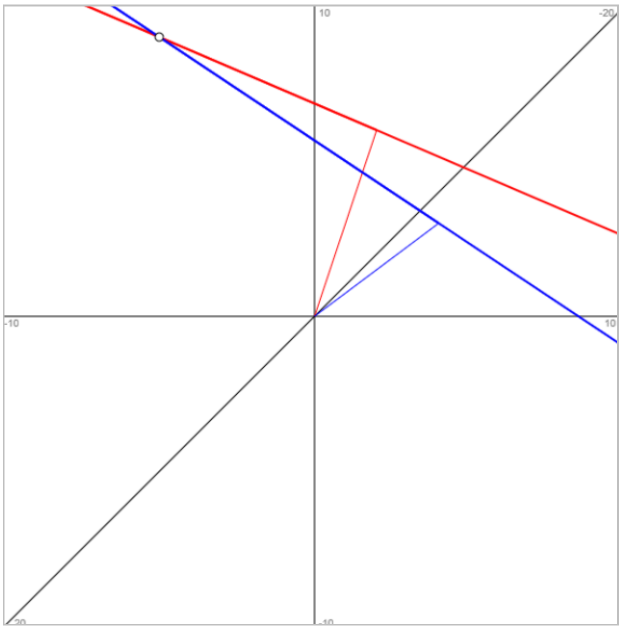
<u>Lösung(en) des linearen Gleichungssystems</u>:

s = 3
(*r* = 2)

IV. Die Lösung s = 3 des linearen Gleichungssystems reicht, um den <u>Schnittpunkt</u> der beiden Geraden g und h zu bestimmen. Einsetzen des Parameters s = 3 in die Geradengleichung von h ergibt dabei:

$$\overrightarrow{OS}=\begin{pmatrix}-6\\1\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-5\\9\end{pmatrix}$$

und damit als Schnittpunkt: S(0|-5|9).



www.michael-buhlmann.de / 06.2018 / Aufgabe 589