Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Geraden

Aufgabe: Gegeben sind die Ebene E: $2x_1 - x_2 - 4x_3 = 9$ und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Bestimme den Schnittpunkt S zwischen der Ebene E und der Geraden g.

b) Berechne die Parametergleichung der Geraden h, die auf der Geraden g senkrecht steht und in der Ebene E liegt.

Lösung: a) I. Für eine Gerade g in Parameterform mit: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und eine Ebenen E in Koordinatenform mit: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ergibt sich hinsichtlich ihrer Lagebeziehung durch Einsetzen der Geradenkomponenten $x_1 = a_1+ru_1$, $x_2 = a_2 + ru_2$, $x_3 = a_3 + ru_3$ in die Koordinatenform der Ebenengleichung eine lineare Gleichung:

$a(a_1+ru_1) + b(a_2 + ru_2) + c(a_3 + ru_3) = d$,

die gemäß den Umformungen für lineare Gleichungen folgende Resultate zeitigt:

a) eine allgemein gültige Aussage 0 = 0 bei Wegfall des Geradenparameters r
=> Gerade liegt auf (in) Ebene: $g \subset E$

b) eine falsche Aussage * = 0 bei Wegfall des Geradenparameters r
=> Gerade und Ebene liegen parallel: g || E

c) ein Geradenparameter r
=> Gerade und Ebene schneiden sich in einem Schnittpunkt: $\{S\} = g \cap E$

(*: reelle Zahl ≠ 0).

II. Wir ermitteln den Schnittpunkt S zwischen der Ebene E und der Geraden g gemäß dem eben Gesagten. Mit der Geradengleichung von g:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ => $x_1 = 4-r$, $x_2 = -1+2r$, $x_3 = -5$

folgt durch Einsetzen der Geradenkomponenten x_1, x_2, x_3 in die Ebenengleichung:

E: $2x_1 - x_2 - 4x_3 = 9$ => $2(4-r) - (-1+2r) - 4(-5) = 9$.

Die lineare Gleichung lässt sich nach r wie folgt umformen:

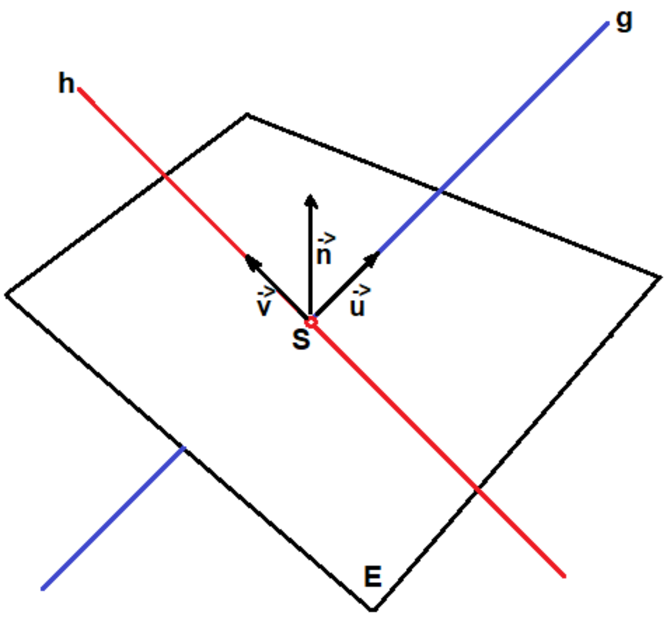
$2(4-r) - (-1+2r) - 4(-5) = 9$	(Klammern auflösen)
$8 - 2r + 1 - 2r + 20 = 9$	(Zusammenfassen)
$29 - 4r = 9$	| -28
$-4r = -20$	| :(-4)
$r = 5$	

Wir erhalten den Schnittpunkt S durch Einsetzen des Parameters r = 5 in die Geradengleichung:

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix}$$ => S(-1|9|-5).

b) I. Unter der Voraussetzung, dass sich eine Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und eine Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ in einem Schnittpunkt S nicht senkrecht schneiden, existiert eindeutig eine Gerade h, die auf der Geraden g senkrecht steht und in der Ebene E liegt. Die <u>Lotgerade</u> h auf der Ebene E bestimmt sich dann über ihren Stützvektor $\vec{OS}$ mit $S(s_1|s_2|s_3)$ als Schnittpunkt und den Richtungsvektor $\vec{v}$, der gleichzeitig senkrecht auf dem Richtungsvektor der Geraden g $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und dem Normalenvektor der Ebene E $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ stehen muss, also von der Form: $\vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sein muss. Die Gerade h hat somit das Aussehen:

h: $\vec{x} = \vec{OS} + s\,\vec{v} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.



II. Der Stützvektor der gesuchten Gerade h ist durch den in Aufgabe a) ermittelten Schnittpunkt S(-1|9|-5) schon gegeben. Wir bilden noch das Kreuzprodukt:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

und erhalten die gesuchte Geradengleichung:

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

III. Wer möchte, kann noch ein Probe durchführen. Die Geraden g und h schneiden sich nach Konstruktion der Geraden h im Schnittpunkt S. Die Geraden stehen dort auch senkrecht aufeinander, wie wir dem Wert des Skalarproduktes der beiden Richtungsvektoren entnehmen können:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ = 8 – 8 + 0 = 0.

Es bleibt noch nachzuweisen, dass die Gerade h auf der Ebene liegt. Dies ist der Fall wegen:

h -> x_1 = -1–8s, x_2 = 9–4s, x_3 = -5–3s -> E: $2x_1 - x_2 - 4x_3 = 9$ ->
2(-1–8s) – (9–4s) – 4(-5–3s) = 9 ⇔ -2 – 16s – 9 + 4s + 20 + 12s = 9 ⇔ 9 = 9

(allgemein gültige Lösung der linearen Gleichung; nach a) I.).

www.michael-buhlmann.de / 06.2020 / Aufgabe 1030