Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Geraden (mit Parameter)

Aufgabe: Für jeden reellen Parameter a sind die Geraden g_a und h_a der Geradenscharen gegeben mit:

$$g_a\text{: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} a \\ 1-a \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h_a\text{: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a+1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeige: Für einige a schneiden sich die Geraden g_a und h_a, ansonsten liegen die Geraden g_a und h_a zueinander windschief.

b) Bestimme den Abstand zwischen den Geraden g_a und h_a u.a. für a = -1, a = 0, a = 1.

Lösung: I. Allgemein kann hinsichtlich der <u>Lage zwischen zwei Geraden</u> g und h unterschieden werden:

a) Geraden sind identisch (g=h);
b) Geraden schneiden sich im Schnittpunkt S ($g \cap h = \{S\}$);
c) Geraden schneiden sich nicht und sind parallel (g||h);
d) Geraden schneiden sich nicht und sind windschief (g, h windschief).

Gleichsetzen der Parametergleichungen der Geraden g und h ergibt ein lineares Gleichungssystem, aus dem mit Hilfe des Gauß-Algorithmus ein Endtableau entsteht. Die auftretenden Arten von Endtableaus haben dann eine der folgenden Gestalten:

a) $\left(\begin{array}{cc|c} * & (*) & (*) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ => 2., 3. Zeile als Nullzeilen => Geraden sind identisch: g = h

b) $\left(\begin{array}{cc|c} * & (*) & (*) \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ => 2. Zeile mit Widerspruch, 3. Zeile als Nullzeile => Geraden sind parallel: g || h

c) $\left(\begin{array}{cc|c} * & (*) & (*) \\ 0 & * & (*) \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ => 3. Zeile als Nullzeile => Geraden schneiden sich im Schnittpunkt S: $g \cap h = \{S\}$

d) $\left(\begin{array}{cc|c} * & (*) & (*) \\ 0 & * & (*) \\ 0 & 0 & * \end{array}\right)$ => 3. Zeile mit Widerspruch => Geraden sind windschief: g, h windschief

(*: reelle Zahl ≠ 0, (*): reelle Zahl ≠ 0 oder = 0).

II. Im Falle der Windschiefheit zwischen den Geraden g und h ist der <u>Abstand</u> d(g.h) nach dem Hilfsebenenverfahren mit der Hilfsebene E_H durch die Gerade g und parallel zur Geraden h sowie:

$$d(g,h) = d(h,E_H) = d(P,E_H)$$

mit Pεh und Hessescher Normalform. Damit ergeben sich mit den Geraden g: $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \vec{b} + s\vec{v} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

der Normalenvektor (der Hilfsebene) $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ und die Abstandsformel für windschiefe Geraden:

$$d(g,h) = \frac{\left|\vec{n} \cdot (\vec{b} - \vec{a})\right|}{\left|\vec{n}\right|} = \frac{\left|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})\right|}{\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|}.$$

III. a) Für jedes reelle a ≠ 0 lassen sich die Geraden g_a und h_a gleich setzen, was ein lineares Gleichungssystem mit den zwei Unbekannten r, s und dem Parameter a, bestehend aus drei Gleichungen ergibt. Es gilt:

$g_a \cap h_a$ ->

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} a \\ 1-a \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a+1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$r\begin{pmatrix} a \\ 1-a \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ -a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ ->}$$

Lineares Gleichungssystem:

	a*r*		=	-4
-	(1-a)*r* -	a*s*	=	2
	2*r* -	(a+1)*s*	=	2

Anfangstableau:

r	*s*		
a	0	|	-4
1-a	-a	|	2
2	-(a+1)	|	2

1. Schritt: a*(*2*) – (1-a)*(*1*) / a*(3) – 2*(1) (mit a≠0)

a	0	|	-4
0	$-a^2$	|	-2a+4
0	-a(a+1)	|	2a+8

2. Schritt: a*(3) – (a+1)*(1) (mit a≠0)

a	0	|	-4
0	$-a^2$	|	-2a+4
0	0	|	$4a^2+6a-4$

(Dabei wurden folgende Berechnungen durchgeführt: Schritt 1: (rechte Seite der 2. Gleichung) = 2a + 4(1-a) = 2a + 4 – 4a = -2a + 4, (rechte Seite der 3. Gleichung) = 2a – 2·(-4) = 2a + 8; Schritt 2. (rechte Seite der 3. Gleichung) = a(2a+8) – (a+1)(-2a+4) = $2a^2$+ 8a – ($-2a^2$+4a-2a+4) = $2a^2$+ 8a – ($-2a^2$+2a+4) = $2a^2$ + 8a + $2a^2$ –2a – 4 = $4a^2$ + 6a – 4.)

Das Endtableau:

a	0	|	-4
0	$-a^2$	|	-2a+4
0	0	|	$4a^2+6a-4$

kann nun wie folgt ausgewertet werden: Die 3. Gleichung des linearen Gleichungssystems als

Nullzeile liegt dann vor, wenn $4a^2+6a-4 = 0 \Leftrightarrow a_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-4)}}{2 \cdot 4} = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{8} = \frac{-6 \pm 10}{8} \Leftrightarrow$

$a_1 = -2$, $a_2 = 0{,}5$. Für a = -2 und a = 0,5 schneiden sich also gemäß I. die Geraden g_{-2} und h_{-2} bzw. $g_{0,5}$ und $h_{0,5}$. Für a = -2 wird das Endtableau zu:

r	s		
-2	0	|	-4
0	-4	|	8
0	0	|	0

mit den Lösungen s = -2, r = 2, so dass sich als Schnittpunkt der Geraden g_{-2} und h_{-2} ergibt:

$$\overrightarrow{OS}_{-2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow S_{-2}(0|6|4).$$

Für a = 0,5 gilt:

r	s		
0.5	0	|	-4
0	-0.25	|	3
0	0	|	0

mit den Lösungen s = -12, r = -8, so dass der Schnittpunkt der Geraden $g_{0,5}$ und $h_{0,5}$ lautet:

$$\overrightarrow{OS}_{0,5} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 12\begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -16 \end{pmatrix} \Rightarrow S_{0,5}(0|-4|-16).$$

Da beim Durchführen des Gauß-Algorithmus im obigen linearen Gleichungssystem $a \neq 0$ vorausgesetzt wurde (sonst wären in den Gaußtabellen aus Gleichungen Nullzeilen geworden), ist noch der Fall a = 0 der Geraden g_0 und h_0 zu untersuchen. Das Anfangstableau wird dabei zu:

r	s		
0	0	|	-4
1	0	|	2
2	-1	|	2

bzw. (durch Vertauschen von Zeilen und Spalten) zu:

s	r		
-1	2	|	2
0	1	|	2
0	0	|	-4

Gemäß I. liegen die Geraden g_0 und h_0 also windschief zueinander. Dieselbe Art von Lagebeziehung erhalten wir für alle $a \neq -2$, $a \neq 0{,}5$ auf Grund des Endtableaus:

a	0	|	-4
0	$-a^2$	|	-2a+4
0	0	|	$4a^2+6a-4$

mit $4a^2+6a-4 \neq 0$, so dass gemäß I. mit der 3. Gleichung im Endtableau ein Widerspruch vorliegt. Die Geraden g_a und h_a sind also für alle $a \neq -2$, $a \neq 0{,}5$ windschief. Parallelität zwischen den Geraden g_a und h_a tritt nicht in Erscheinung.

b) Gemäß der Hesseschen Normalform in II. bestimmt sich der Abstand zwischen den (nicht parallelen) Geraden g_a und h_a für alle reellen a mit Hilfe des Kreuzprodukts der Richtungsvektoren

$$\begin{pmatrix} a \\ 1-a \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a+1 \end{pmatrix}:$$

$$\begin{pmatrix} a \\ 1-a \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a^2-2a \\ -a^2-a \\ a^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = -\begin{pmatrix} 1-a^2-2a \\ -a^2-a \\ a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+2a-1 \\ a^2+a \\ -a^2 \end{pmatrix}$$

und des Differenzvektors der Stützvektoren:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

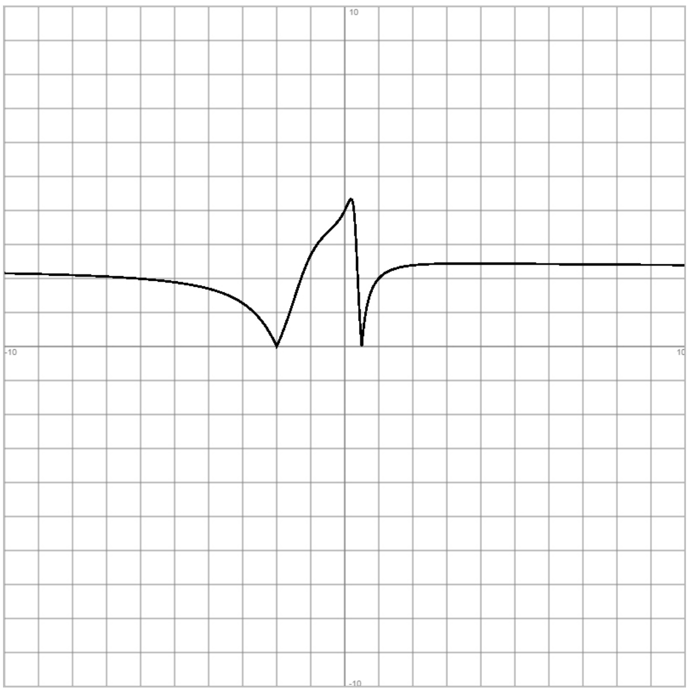
als:

$$d(g_a,h_a) = \frac{\left| \begin{pmatrix} a^2+2a-1 \\ a^2+a \\ -a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} a^2+2a-1 \\ a^2+a \\ -a^2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left|-4(a^2+2a-1)+2(a^2+a)-2a^2\right|}{\sqrt{(a^2+2a-1)^2+(a^2+a)^2+(-a^2)^2}} =$$

$$\frac{\left|-4a^2-6a+4\right|}{\sqrt{(a^4+4a^3+2a^2-4a+1)+(a^4+2a^3+a^2)+a^4}} = \frac{\left|4a^2+6a-4\right|}{\sqrt{3a^4+6a^3+3a^2-4a+1}} = d(a).$$

Wir erkennen: Die <u>Abstandsfunktion</u> d(a) besitzt bei a = -2 und a = 0,5 Nullstellen; die Geraden g_{-2} und h_{-2} bzw. $g_{0,5}$ und $h_{0,5}$ schneiden sich ja. Für a -> ±∞ ergibt sich noch: d(a) -> $\frac{4}{\sqrt{3}}$ ≈ 2,30946.

Die Abstandsfunktion ist daher beschränkt und hat das Aussehen:

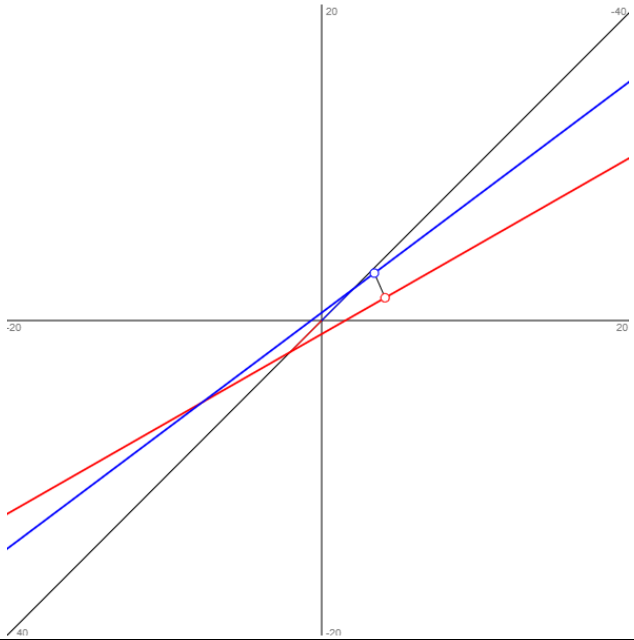


Dann ist:

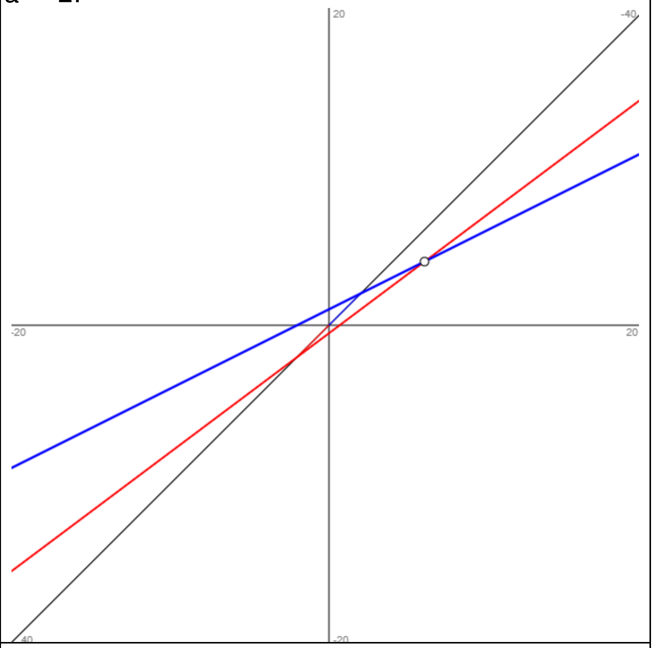
$d(g_{-1}, h_{-1}) = d(-1) = 6/\sqrt{5} \approx 2{,}6833$ LE
$d(g_0, h_0) = d(0) = 4/\sqrt{1} = 4$ LE
$d(g_1, h_1) = d(1) = 6/\sqrt{9} = 2$ LE.

IV. <u>Lagebeziehungen</u> (grafisch) (a = -4, a = -2, a = -1, a = 0, a = 0,5, a = 1):

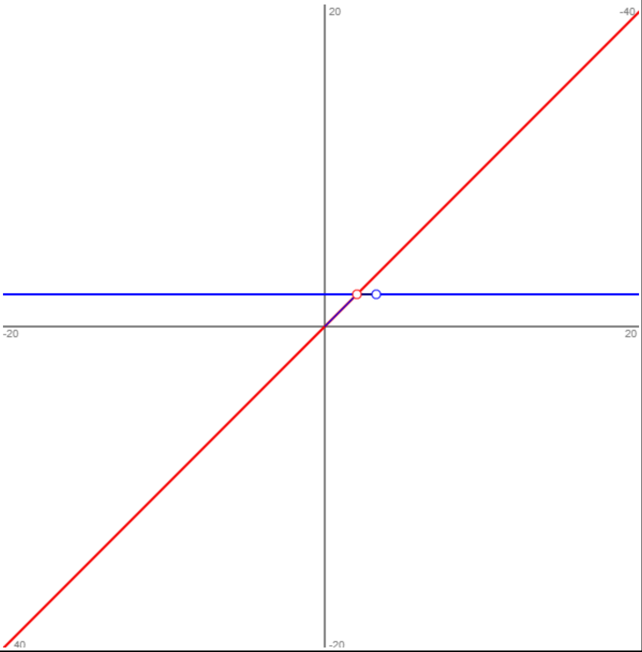
a = -4:



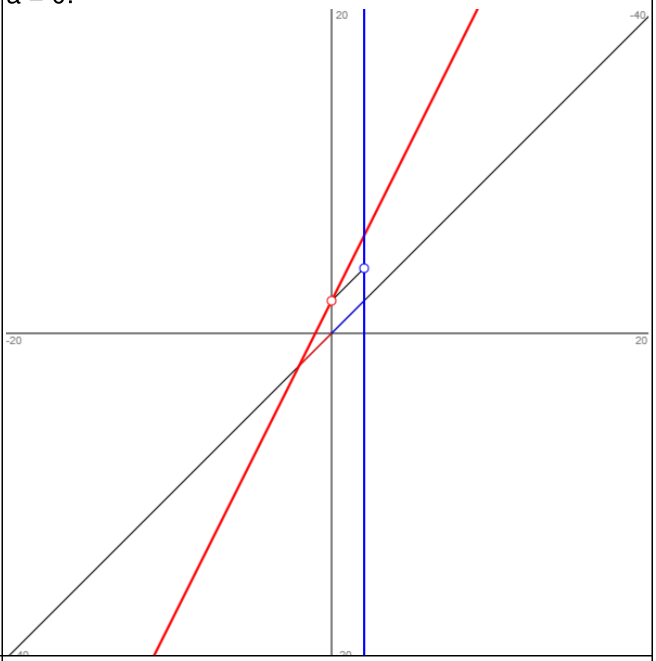
a = -2:



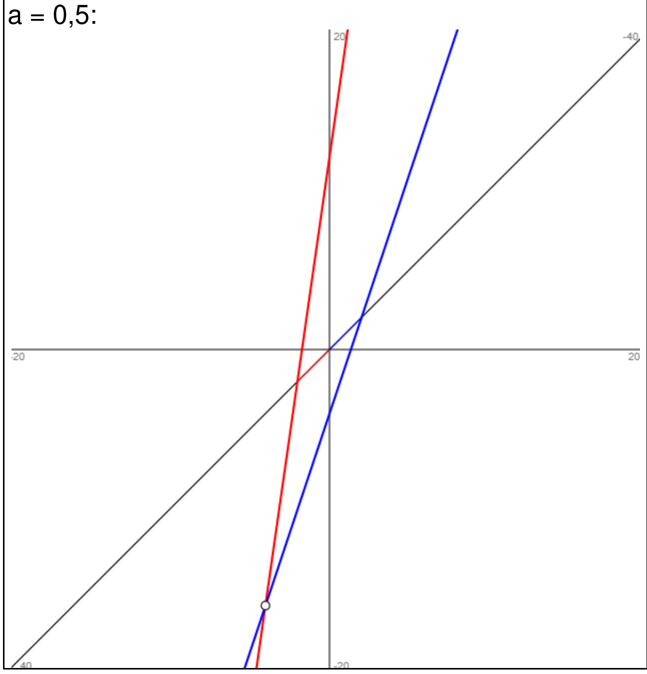
a = -1:



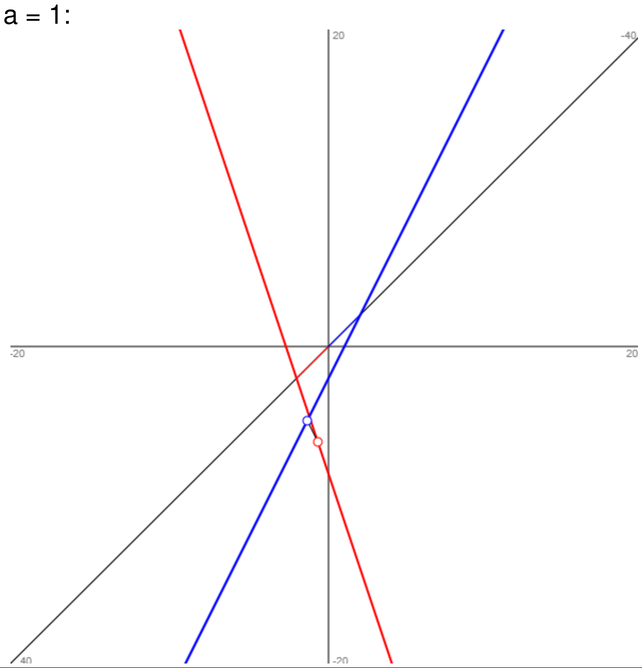
a = 0:



a = 0,5:



a = 1:



Geradengleichungen:

g_{-4}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, h_{-4}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ -> Geraden sind windschief

g_{-2}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, h_{-2}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ -> Geraden schneiden sich, Schnittpunkt $S_{-2}(0|6|4)$

g_{-1}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, h_{-1}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ -> Geraden sind windschief

g_0: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, h_0: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ -> Geraden sind windschief

$g_{0,5}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $h_{0,5}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 1,5 \end{pmatrix}$ -> Geraden schneiden sich, Schnittpkt. $S_{0,5}(0|-4|-16)$

g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, h_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ -> Geraden sind windschief

(LE = Längeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 10.2022 / Aufgabe 1724