Michael Buhlmann

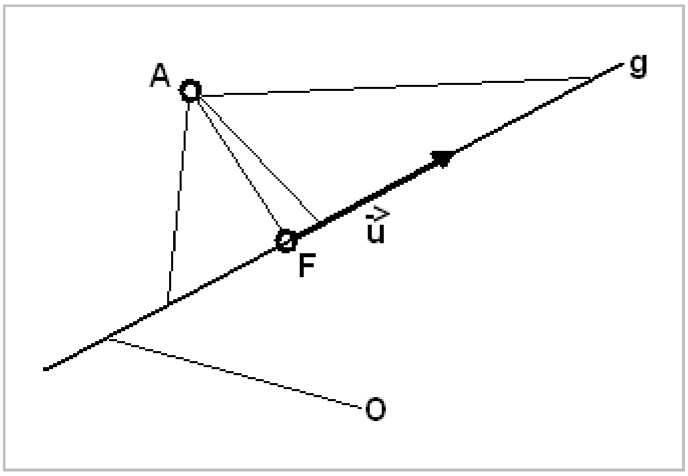
Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Geraden/Punkte

Aufgabe: Beschreibe eine Vorgehensweise, auf welche Weise im dreidimensionalen Vektorraum ein Punkt um eine Gerade gespiegelt werden kann.

1. Lösung: Die Gerade g sei von der Form: g: $\vec{x} = \vec{b} + t\vec{u} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, der Punkt A habe das Aussehen $A(a_1|a_2|a_3) \notin g$. Gesucht ist zunächst auf der Geraden der Lotfußpunkt $F \varepsilon g$ zum Punkt A, die Spiegelung erfolgt dann als Punktspiegelung um den Lotfußpunkt F als Spiegelpunkt. Es gilt dazu das <u>Lotfußpunktverfahren</u> mit folgender Vorgehensweise:

1) Jeder „laufende Punkt" F_t auf der Geraden g hat die Form $F_t(b_1+tu_1|b_2+tu_2|b_3+tu_3) \varepsilon g$.
2) Der Differenzvektor zwischen den Punkten A und F_t hat das Aussehen:

$$\vec{AF_t} = \begin{pmatrix} b_1+tu_1 \\ b_2+tu_2 \\ b_3+tu_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1+tu_1-a_1 \\ b_2+tu_2-a_2 \\ b_3+tu_3-a_3 \end{pmatrix}.$$



3) Der Lotfußpunkt auf der Geraden g zum Punkt A kann dann ermittelt werden, wenn der Differenzvektor zwischen den Punkten A und F_t senkrecht auf der Geraden, d.h. auf dem Richtungsvektor der Geraden steht, also mit Hilfe des Skalarprodukts:

$$\vec{AF_t} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} b_1+tu_1-a_1 \\ b_2+tu_2-a_2 \\ b_3+tu_3-a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (*)$$

Das Auflösen des Skalarprodukts in Gleichung (*) ergibt dann:

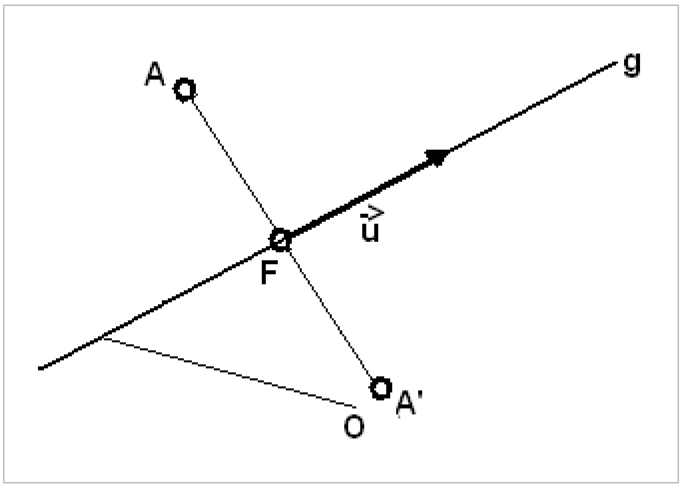
$u_1(b_1 + tu_1 - a_1) + u_2(b_2 + tu_2 - a_2) + u_3(b_3 + tu_3 - a_3) = 0 \Leftrightarrow$
$t(u_1^2+u_2^2+u_3^2) = u_1(a_1-b_1) + u_2(a_2-b_2) + u_3(a_3-b_3) \Leftrightarrow$
$t_0 = t = [u_1(a_1-b_1) + u_2(a_2-b_2) + u_3(a_3-b_3)]/(u_1^2+u_2^2+u_3^2)$.

Mit $t = t_0$ ergibt sich der Lotfußpunkt $F(b_1+t_0u_1|b_2+t_0u_2|b_3+t_0u_3)$ auf der Geraden g zum Punkt A gemäß: $\vec{OF} = \vec{b} + t_0 \vec{u} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t_0 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$.

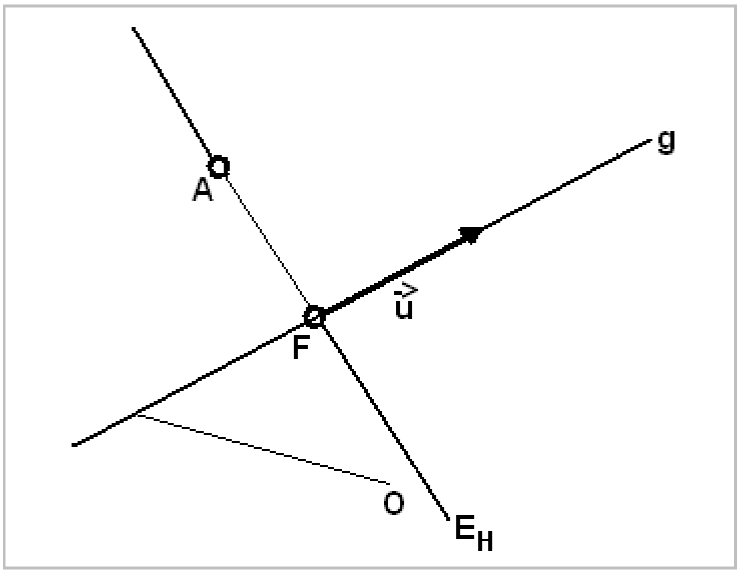
Mit dem ermittelten Lotfußpunkt Fεg lässt sich die Spiegelung des vorgegebenen Punktes A an der Geraden g durchführen. Wir erhalten damit den gespiegelten Punkt A‘ aus der (den) Spiegelformel(n):

$$\vec{OA'} = \vec{OA} + 2\cdot\vec{AF} = \vec{OF} + \vec{AF} = 2\cdot\vec{OF} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 2(b_1 + t_0 u_1) - a_1 \\ 2(b_2 + t_0 u_2) - a_2 \\ 2(b_3 + t_0 u_3) - a_3 \end{pmatrix}.$$

Der gespiegelte Punkt A‘ ist also von der Form: A‘$(2b_1+2t_0u_1–a_1|2b_2+2t_0u_2–a_2|2b_3+2t_0u_3–a_3)$.



2. Lösung: Die Gerade g sei von der Form: g: $\vec{x} = \vec{b} + t\vec{u} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, der Punkt A habe das Aussehen $A(a_1|a_2|a_3) \notin g$. Gesucht ist zunächst auf der Geraden der Lotfußpunkt Fεg zum Punkt A, die Spiegelung erfolgt dann als Punktspiegelung um den Lotfußpunkt F als Spiegelpunkt.



Es gilt dazu das Hilfsebenenverfahren mit folgender Vorgehensweise:

1) Mit dem Richtungsvektor der Geraden als Normalenvektor kann eine Hilfsebene E_H durch den Punkt A gebildet werden, die senkrecht auf der Geraden g steht, also:

$$E_H\colon\ \vec{u}\cdot\vec{x} = \vec{u}\cdot\vec{OA}.$$

In Koordinatenform lautet die Hilfsebene:

$$E_H: u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3 \quad (*).$$

2) Wir lassen die Hilfsebene E_H mit der Geraden g schneiden. Einsetzen der Komponenten $x_1 = b_1 + tu_1$, $x_2 = b_2 + tu_2$, $x_3 = b_3 + tu_3$ der Geraden g in (*) führt auf die Gleichung:

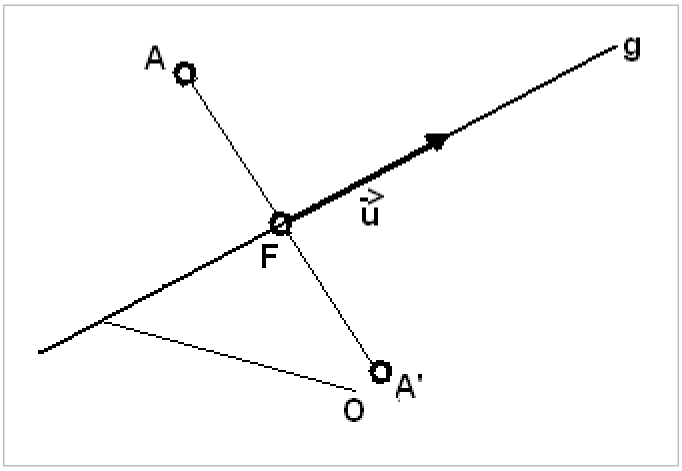
$u_1(b_1 + tu_1) + u_2(b_2 + tu_2) + u_3(b_3 + tu_3) = u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3 \Leftrightarrow$
$t(u_1^2+u_2^2+u_3^2) = u_1(a_1-b_1) + u_2(a_2-b_2) + u_3(a_3-b_3) \Leftrightarrow$
$t_0 = t = [u_1(a_1-b_1) + u_2(a_2-b_2) + u_3(a_3-b_3)]/(u_1^2+u_2^2+u_3^2)$.

Mit $t = t_0$ ergibt sich der Lotfußpunkt $F(b_1+ t_0u_1|b_2+t_0u_2|b_3+ t_0u_3)$ auf der Geraden g zum Punkt A gemäß: $\vec{OF} = \vec{b} + t_0 \vec{u} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t_0 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$.

Mit dem ermittelten Lotfußpunkt Fεg lässt sich die Spiegelung des vorgegebenen Punktes A an der Geraden g durchführen. Wir erhalten damit den gespiegelten Punkt A‘ aus der (den) Spiegelformel(n):

$$\vec{OA'} = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF} = \vec{OF} + \vec{AF} = 2 \cdot \vec{OF} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 2(b_1 + t_0u_1) - a_1 \\ 2(b_2 + t_0u_2) - a_2 \\ 2(b_3 + t_0u_3) - a_3 \end{pmatrix}.$$

Der gespiegelte Punkt A‘ ist also von der Form: $A'(2b_1+2t_0u_1-a_1|2b_2+2t_0u_2-a_2|2b_3+2t_0u_3-a_3)$.

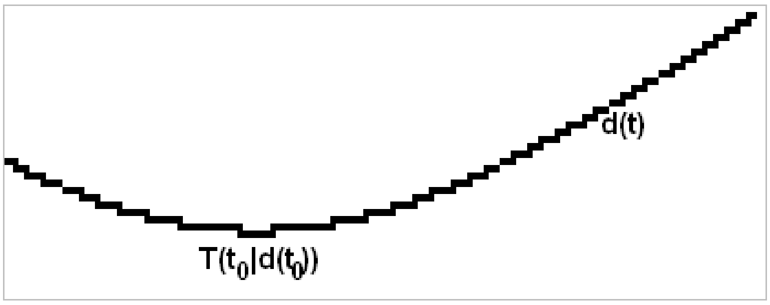


3. Lösung: Die Gerade g sei von der Form: g: $\vec{x} = \vec{b} + t\vec{u} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, der Punkt A habe das Aussehen $A(a_1|a_2|a_3) \notin g$. Gesucht ist zunächst auf der Geraden der Lotfußpunkt Fεg zum Punkt A, die Spiegelung erfolgt dann als Punktspiegelung um den Lotfußpunkt F als Spiegelpunkt. Es gilt dazu das Verfahren mit einer Abstandsfunktion mit folgender Vorgehensweise:

1) Jeder „laufende Punkt“ F_t auf der Geraden g hat die Form $F_t(b_1+tu_1|b_2+tu_2|b_3+tu_3)$εg.
2) Der Differenzvektor zwischen den Punkten A und F_t hat das Aussehen:

$$\vec{AF_t} = \begin{pmatrix} b_1 + tu_1 \\ b_2 + tu_2 \\ b_3 + tu_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + tu_1 - a_1 \\ b_2 + tu_2 - a_2 \\ b_3 + tu_3 - a_3 \end{pmatrix}.$$

3) Der Lotfußpunkt F auf der Geraden g liegt dann vor, wenn die Abstandsfunktion zwischen dem „laufenden Punkt“ F_t der Geraden g und dem Punkt A minimal wird, wenn also die Abstandsfunktion einen Tiefpunkt hat.



Die Abstandsfunktion d(t) kann ermittelt werden als:

d(t) = $\left|\vec{AF_t}\right| = \left|\begin{pmatrix} b_1+tu_1-a_1 \\ b_2+tu_2-a_2 \\ b_3+tu_3-a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(b_1+tu_1-a_1)^2+(b_2+tu_2-a_2)^2+(b_3+tu_3-a_3)^2}$

Die Abstandsfunktion d(t) ist minimal, wenn d'(t) = 0, also:

d'(t) = $\dfrac{2u_1(b_1+tu_1-a_1)+2u_2(b_2+tu_2-a_2)+2u_3(b_3+tu_3-a_3)}{2\sqrt{(b_1+tu_1-a_1)^2+(b_2+tu_2-a_2)^2+(b_3+tu_3-a_3)^2}} = 0 \Leftrightarrow$

$2u_1(b_1+tu_1-a_1)+2u_2(b_2+tu_2-a_2)+2u_3(b_3+tu_3-a_3) = 0 \Leftrightarrow$

$u_1(b_1+tu_1-a_1)+u_2(b_2+tu_2-a_2)+u_3(b_3+tu_3-a_3) = 0 \Leftrightarrow$

$t(u_1^2+u_2^2+u_3^2)+u_1(b_1-a_1)+u_2(b_2-a_2)+u_3(b_3-a_3) = 0 \Leftrightarrow$

$t(u_1^2+u_2^2+u_3^2) = u_1(a_1-b_1)+u_2(a_2-b_2)+u_3(a_3-b_3) \Leftrightarrow$

$t_0 = t = \dfrac{u_1(a_1-b_1)+u_2(a_2-b_2)+u_3(a_3-b_3)}{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$

Mit t = t_0 ergibt sich der Lotfußpunkt $F(b_1+t_0u_1|b_2+t_0u_2|b_3+t_0u_3)$ auf der Geraden g zum Punkt A gemäß: $\vec{OF} = \vec{b} + t_0\vec{u} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t_0\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$.

Mit dem ermittelten Lotfußpunkt Fεg lässt sich die Spiegelung des vorgegebenen Punktes A an der Geraden g durchführen. Wir erhalten damit den gespiegelten Punkt A' aus der (den) Spiegelformel(n):

$$\vec{OA'} = \vec{OA} + 2\cdot\vec{AF} = \vec{OF} + \vec{AF} = 2\cdot\vec{OF} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 2(b_1+t_0u_1)-a_1 \\ 2(b_2+t_0u_2)-a_2 \\ 2(b_3+t_0u_3)-a_3 \end{pmatrix}.$$

Der gespiegelte Punkt A' ist also von der Form: $A'(2b_1+2t_0u_1-a_1|2b_2+2t_0u_2-a_2|2b_3+2t_0u_3-a_3)$.