Michael Buhlmann

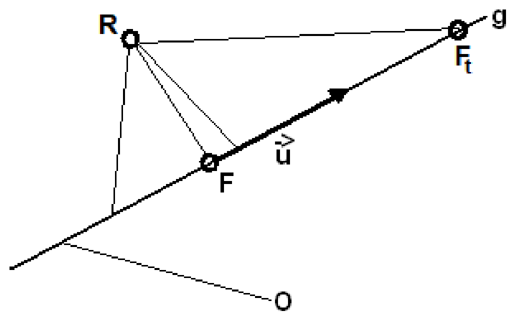
Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Geraden/Punkte

Aufgabe: Berechne den Abstand zwischen dem Punkt R(-1|5|-8) und der Geraden: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösungen: Wir geben nachstehend fünf (synchronisierte) Lösungsmöglichkeiten an, die zum Teil identische Vorgehensweisen und Rechnungen beinhalten.

1. Lösung (Abstandsfunktion):

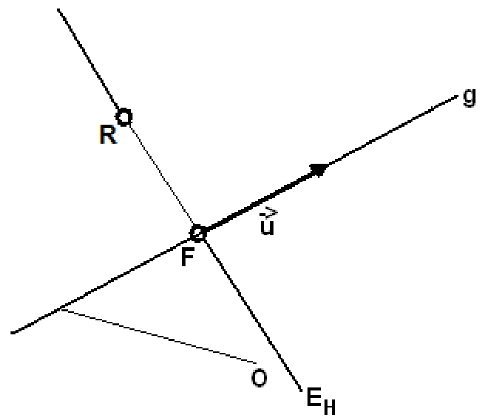
2. Lösung (Abstandsfunktion):



3. Lösung (Orthogonalitätsbedingung):

I. Für jeden „laufenden" Punkt F_t auf der Geraden g gilt vermöge: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$: F_t(8–2t|-1+2t|4+t), so dass der Differenzvektor $\vec{RF_t}$ den (nicht auf der Geraden liegenden) Punkt R mit dem „laufenden" Geradenpunkt F_t verbindet. Für den Differenzvektor ergibt sich: $\vec{RF_t} = \begin{pmatrix} 8-2t \\ -1+2t \\ 4+t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-2t \\ -6+2t \\ 12+t \end{pmatrix}$.

4. Lösung (Hilfsebenenverfahren):



I. Es wird zunächst die Hilfsebene E_H konstruiert, die senkrecht zur Gerade g steht und durch den (nicht auf der Geraden liegenden) Punkt R verläuft. Für den Normalenvektor der Ebene gilt:

$\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, denn wegen der Orthogonalität zwischen Geraden und Ebene ist der Normalenvektor der Ebene der Richtungsvektor der Geraden. Die Ebene verläuft durch den Punkt R, also gilt (nach der Normalenform der Ebene mit Orts-/Stützvektor von R):

$$E_H: \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix},$$

woraus durch Ausmultiplizieren der Skalarprodukte

E_H: $-2x_1+2x_2+x_3 = (-2)\cdot(-1)+2\cdot5+1\cdot(-8)$

und:

E_H: $-2x_1+2x_2+x_3 = 4$

als Hilfsebene E_H folgt.

II. Der Betrag des Differenzvektors $\left|\vec{RF_t}\right|$ liefert die Länge zwischen Punkt R und Geradenpunkt F_t; diese Länge ist minimal und damit identisch mit dem Abstand d(R,g) zwischen Punkt R und Gerade g, wenn der Geradenpunkt F_t der Lotfußpunkt F der Geraden g bzgl. des Punktes R ist. Wir definieren die zu minimierende <u>Abstandsfunktion</u> $d(t) = \left|\vec{RF_t}\right|$ mit:

$$d(t) = \left|\begin{pmatrix} 9-2t \\ -6+2t \\ 12+t \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(9-2t)^2+(-6+2t)^2+(12+t)^2}\ .$$

Die Funktion d(t) ist zu minimieren. Dies geschieht über

die Anzeige des Graphen von d(t) mit:

die Ableitung d'(t) der Funktion d(t) vermöge des Sachverhaltes, dass die Quadratwurzelfunktion d(t) mit ihren quadratischen Summanden genau ein Minimum auf den ganzen reellen Zahlen besitzt. Die Ableitung ergibt sich gemäß $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ als Ableitung der Quadratwurzelfunktion und nach der Kettenregel als:

d'(t) =

II. Der Abstand d(R,g) zwischen Punkt R und Gerade g ist gegeben, wenn der Differenzvektor $\vec{RF_t}$ senkrecht auf der Geraden g steht. Unter den Geradenpunkten F_t erkennt man also den Lotfußpunkt F, weil dort die <u>Orthogonalitätsbedingung</u>:

$$\vec{RF_t} \cdot \vec{u} = 0$$

mit $\vec{u}$ als Richtungsvektor der Geraden g gilt. Auswerten dieser Bedingung führt auf:

$$\begin{pmatrix} 9-2t \\ -6+2t \\ 12+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

und das Ausmultiplizieren des Skalarprodukts:

$$(9-2t)\cdot(-2)+(-6+2t)\cdot2+(12+t)\cdot1=0.$$

Es folgt die Gleichung:

II. Der Lotfußpunkt ist der Punkt F der Geraden g bzgl. des Punktes R. Er bestimmt sich als <u>Schnittpunkt</u> von Hilfsebene E_H und Geraden g. Demgemäß zerlegen wir die Gerade g in die Komponenten:

$x_1 = 8-2t$
$x_2 = -1+2t$
$x_3 = 4+t$

und setzen die Koordinaten x_1, x_2, x_3 in die Hilfsebene E_H ein. Es ergibt sich eine Gleichung mit dem Parameter t, also:

$-2(8-2t)+2(-1+2t)+(4+t) = 4$.

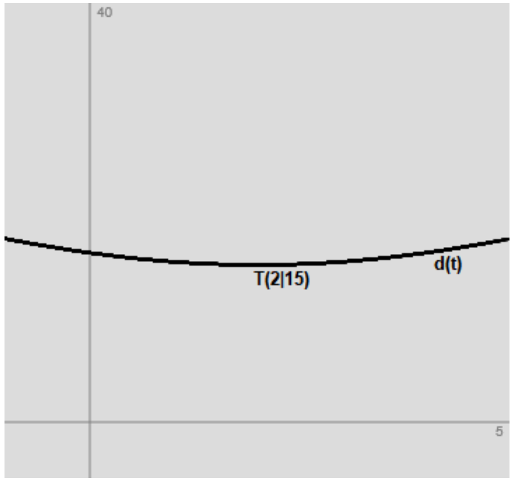
Auflösen der Klammern ergibt:

$-16+4t-2+4t+4+t = 4$,

Das Zusammenfassen der Zahlen und t auf der linken Seite der Gleichung führt auf:

$-14+9t = 4$,

die Addition mit der Zahl 14 schließlich auf:



$$\frac{2(9-2t)\cdot(-2)+2(-6+2t)\cdot 2+2(12+t)\cdot 1}{2\sqrt{(9-2t)^2+(-6+2t)^2+(12+t)^2}}$$
$$=\frac{-4(9-2t)+4(-6+2t)+2(12+t)}{2\sqrt{(9-2t)^2+(-6+2t)^2+(12+t)^2}}.$$

Nach den Regeln der Differenzialrechnung liegt das Minimum der Funktion d(t) dort, wo d'(t) = 0 gilt (Extremwertbedingung). Der Bruch von d'(t) ist 0, wenn der Zähler 0 ist, also:

$$-4(9-2t)+4(-6+2t)+2(12+t)=0.$$

Teilen durch die Zahl 2 ergibt die Gleichung:

$$-2(9-2t)+2(-6+2t)+(12+t)=0;$$

durch das Auflösen der Klammern folgt:

-18+4t–12+4t+12+t = 0.

Das Zusammenfassen der Zahlen und t auf der linken Seite der Gleichung führt auf:

-18+9t = 0,

die Addition mit der Zahl 18 schließlich auf:

9t = 18,

so dass sich nach Teilen durch die Zahl 9 der Parameterwert t=2 ergibt.

III. Es ergibt sich auf Grund des Tiefpunktes T(2|15) der Funktion d(t) bei t=2 mit d(R,g) = d(2) = 15 der gesuchte <u>Abstand</u> zwischen Punkt R und Geraden g.

III. Wir ermitteln den <u>Lotfußpunkt</u> F auf der Geraden g bzgl. des Punktes R durch Einsetzen des errechneten Parameters t=2 in die Parametergleichung der Geraden g als:

$$\overrightarrow{OF}=\begin{pmatrix}8\\-1\\4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\\6\end{pmatrix},$$

so dass als Lotfußpunkt der Punkt F(4|3|6) folgt. Zur Bestimmung des <u>Abstands</u> bilden wir den Differenzvektor $\overrightarrow{RF}$

als:

$$\overrightarrow{RF}=\begin{pmatrix}4\\3\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\5\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-2\\14\end{pmatrix}.$$

, indem wir den Parameter t=2 in den Differenzvektor $\overrightarrow{RF_t}$ einsetzen und:

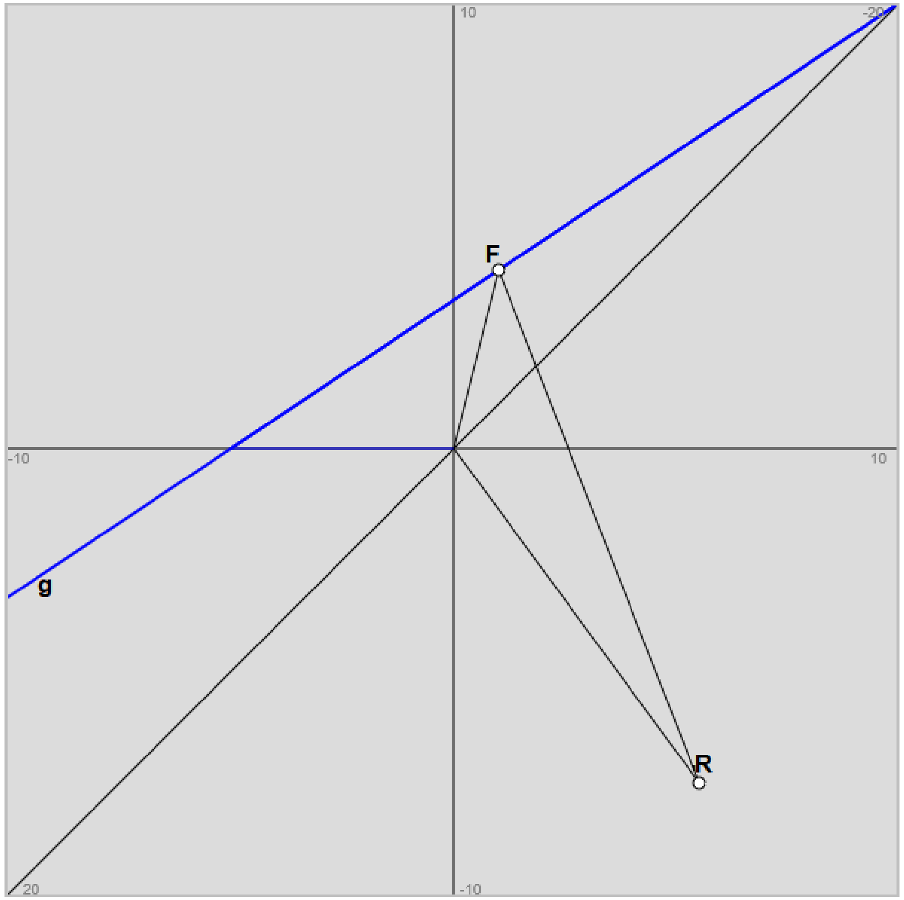
$$\overrightarrow{RF}=\overrightarrow{RF_2}=\begin{pmatrix}9-2\cdot 2\\-6+2\cdot 2\\12+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-2\\14\end{pmatrix}$$

erhalten.

Der Abstand zwischen Punkt R und Gerade g ist der Betrag des Differenzvektors $\overrightarrow{RF}$, also:

$$d(R,g) = \left|\overrightarrow{RF}\right| = \left|\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + 14^2} = \sqrt{225} = 15 .$$

IV. Wir kommen zu dem <u>Ergebnis</u>: Der Abstand zwischen dem Punkt R(-1|5|-8) und der Geraden: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ beträgt: d(R,g) = 15 LE.



5. Lösung: I. Wir verwenden die Kreuzprodukt-/Vektorproduktformel zur direkten Bestimmung des Abstands d(R,g) zwischen einem (nicht auf der Geraden liegenden) Punkt R und einer Geraden g. Mit Stützvektor $\vec{OA}$ und Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden g ergibt sich:

$$d(R,g) = \frac{\left|\vec{u} \times \vec{AR}\right|}{\left|\vec{u}\right|}.$$

II. Wir bilden zunächst den Differenzvektor zwischen dem Stützvektor der Geraden g und dem Punkt R als:

$$\vec{AR} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Wir errechnen das Kreuzprodukt aus Differenzvektor und Richtungsvektor der Geraden g:

$$\vec{u} \times \vec{AR} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 \\ -30 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Der Abstand errechnet sich nach obiger Formel als:

$$d(R,g) = \frac{\left|\vec{u} \times \vec{AR}\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -33 \\ -30 \\ 6 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\sqrt{(-33)^2 + (-30)^2 + 6^2}}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2025}}{\sqrt{9}} = \frac{45}{3} = 15 \text{ LE.}$$

(LE = Längeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 09.2017 / Aufgabe 451