Michael Buhlmann

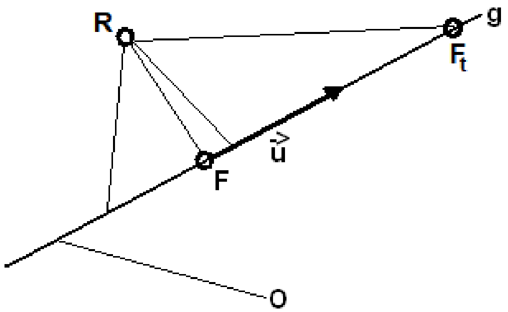
# Mathematikaufgaben
## > Vektorrechnung
## > Geraden/Punkte

---

**Aufgabe**: Erläutere an Hand des Punktes R(4|-1|2) und der Geraden: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, wie die Ermittlung des Abstandes d(R,g) zwischen Punkt R und Geraden g, die zur Geraden g senkrecht stehende Lotgerade h durch den Punkt R und die Spiegelung des Punktes R an der Geraden g zu bestimmen bzw. durchzuführen sind.

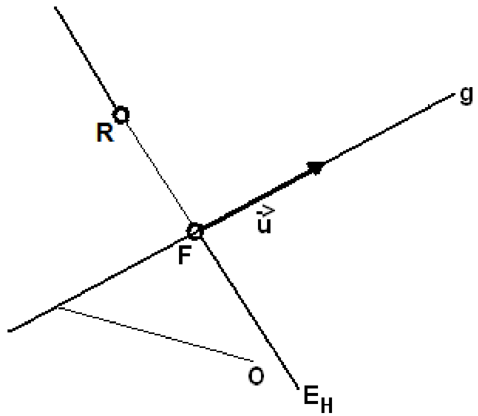
**Lösung**: I. Allen in der Aufgabe aufgeführten mathematischen Problemen ist gemeinsam, dass zum nicht auf der Geraden g liegenden Punkt R zunächst der Lotfußpunkt auf der Geraden g ermittelt werden muss. Dies geschieht entweder über die Orthogonalitätsbedingung oder mit dem Hilfsebenenverfahren.

II. Orthogonalitätsbedingung:




Für jeden „laufenden" Punkt $F_t$ auf der Geraden g gilt vermöge: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$:

II. Hilfsebenenverfahren:




Es wird zunächst die Hilfsebene $E_H$ konstruiert, die senkrecht zur Gerade g steht und durch den (nicht auf der Geraden liegenden) Punkt R verläuft. Für den Normalenvektor der Ebene gilt die Übereinstimmung mit dem Richtungsvektor der Geraden, denn wegen

$F_t(3+t|2–2t|t)$, so dass der Differenzvektor $\vec{RF_t}$ den Punkt R mit dem „laufenden“ Geradenpunkt $F_t$ verbindet. Für den Differenzvektor ergibt sich:

$$\vec{RF_t} = \begin{pmatrix} 3+t \\ 2-2t \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+t \\ 3-2t \\ t-2 \end{pmatrix}.$$

III. Unter den Geradenpunkten $F_t$ erkennt man den Lotfußpunkt F, wenn der Differenzvektor $\vec{RF_t}$ senkrecht auf der Geraden g steht. Es gilt die Orthogonalitätsbedingung:

$$\vec{RF_t} \cdot \vec{u} = 0$$

mit $\vec{u}$ als Richtungsvektor der Geraden g gilt. Auswerten dieser Bedingung führt auf:

$$\begin{pmatrix} -1+t \\ 3-2t \\ t-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

und das Ausmultiplizieren des Skalarprodukts:

$$(-1+t)\cdot 1 + (3-2t)\cdot(-2) + (t-2)\cdot 1 = 0.$$

Umformungen der Gleichung ergeben:

$-1+t-6+4t+t-2 = 0 \Leftrightarrow -9+6t = 0 \Leftrightarrow 6t = 9 \Leftrightarrow t = 1{,}5$.

der Orthogonalität zwischen Geraden und <u>Hilfsebene</u> ist der Normalenvektor der Ebene der Richtungsvektor der Geraden, also:

$$\vec{n} = \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Die Ebene verläuft durch den Punkt R, also gilt (nach der Normalenform der Ebene mit Orts-/Stützvektor von R):

$$E_H: \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

woraus durch Ausmultiplizieren der Skalarprodukte

$E_H$: $x_1–2x_2+x_3 = 1\cdot4+(-2)\cdot(-1)+1\cdot2$

und:

$E_H$: $x_1–2x_2+x_3 = 8$

als Hilfsebene $E_H$ folgt.

III. Der Lotfußpunkt ist der Punkt F der Geraden g bzgl. des Punktes R. Er bestimmt sich als <u>Schnittpunkt</u> von Hilfsebene $E_H$ und Geraden g. Demgemäß zerlegen wir die Gerade g in die Komponenten:

$x_1 = 3+t$
$x_2 = 2–2t$
$x_3 = t$

und setzen die Koordinaten $x_1$, $x_2$, $x_3$ in die Hilfsebene $E_H$ ein. Es ergibt sich eine Gleichung mit dem Parameter t, also:

$(3+t)–2(2–2t)+t = 8$.

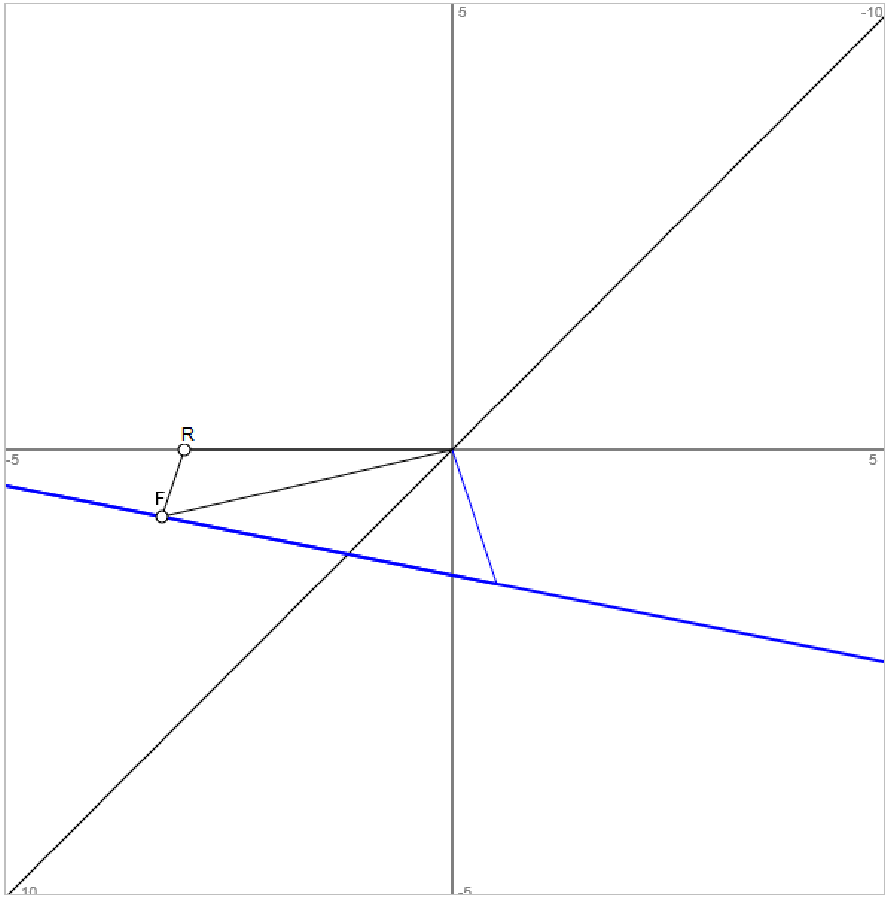
Umformungen der Gleichung führen auf:

$3+t–4+4t+t = 8 \Leftrightarrow -1+6t = 8 \Leftrightarrow 6t = 9 \Leftrightarrow t = 1{,}5$.

IV. Der errechnete Parameter t=1,5 steht für den Lotfußpunkt F, den wir durch Einsetzen von t in die Geradengleichung g erhalten:

$$\vec{OF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ -1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}.$$

Der <u>Lotfußpunkt</u> lautet also: F(4,5|-1|1,5).




V. Wie oben schon erwähnt, dient der Lotfußpunkt der Lösung der drei Aufgabenstellungen: Abstand, Lotgerade, Spiegelung. Im Einzelnen haben wir:

VI. Abstandsberechnung: Zur Bestimmung des Abstands bilden wir den Differenzvektor $\overrightarrow{RF}$ und erhalten:

$$\overrightarrow{RF} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ -1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Der Abstand zwischen Punkt R und Gerade g ist der Betrag des Differenzvektors $\overrightarrow{RF}$, also:

VI. Lotgerade: Die Lotgerade h zur Geraden g durch den Punkt R verläuft auch durch den Lotfußpunkt F, so dass für die Lotgerade die Formel gilt:

h: $\vec{x} = \overrightarrow{OR} + t\,\overrightarrow{RF}$.

Mit $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Stützvektor und $\overrightarrow{RF} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ -1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

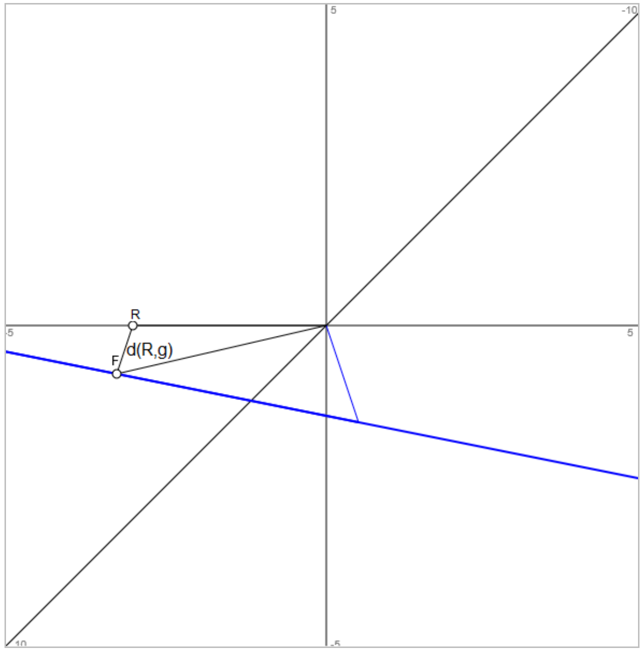
VI. Spiegelung: Die Spiegelung des Punktes R an der Geraden g ist die Punktspiegelung des Urbilds R am Lotfußpunkt F als Spiegelpunkt. Es gelten damit die Spiegelformeln:

$$\overrightarrow{OR'} = \overrightarrow{OR} + 2\,\overrightarrow{RF}$$
$$\overrightarrow{OR'} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{RF}$$
$$\overrightarrow{OR'} = 2\,\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OR}.$$

Wir wählen die letzte Spiegelformel und erhalten:

d(R,g) = $\left|\vec{RF}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0{,}5^2 + (-0{,}5)^2} = \sqrt{0{,}5} = 0{,}707.$

VII. Wir kommen zu dem <u>Ergebnis</u>: Der Abstand zwischen dem Punkt R(4|-1|2) und der Geraden: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ beträgt: d(R,g) = $\sqrt{0{,}5}$ LE.

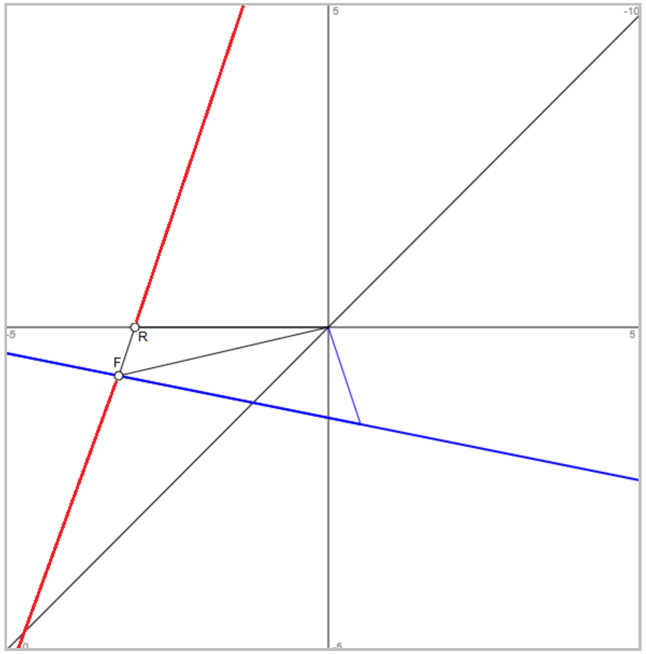



(LE = Längeneinheiten)

$= \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$ als Richtungsvektor ergibt sich als Gleichung der Lotgeraden:

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$.

VII. <u>Ergebnis</u>: Die zur Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ senkrecht stehende Lotgerade h durch den Punkt R(4|-1|2) lautet: h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$.




$\vec{OR'} = 2\begin{pmatrix} 4{,}5 \\ -1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

und mithin R'(5|-1|1) als Bildpunkt.

VII. Als <u>Ergebnis</u> können wir festhalten: Wird der Punkt R(4|-1|2) an der Geraden: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gespiegelt, so entsteht als Bildpunkt R'(5|-1|1).