**Michael Buhlmann**

# Mathematikaufgaben
## > Vektorrechnung
## > Geraden

---

**Aufgabe**: Gegeben ist das Geradenbüschel $g_a$ und die Gerade h mit:

$$g_a:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1/a \end{pmatrix},\ a \neq 0;\ h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass die Gerade h zum Geradenbüschel $g_a$ gehört.

**Lösung**: I. Allgemein gilt das Folgende zu den Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden: Für zwei Geraden g und h in Parameterform mit: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ ergibt sich durch Gleichsetzen ein lineares Gleichungssystem (drei Gleichungen; zwei Parameter r, s als Unbekannte) mit dem Anfangstableau:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} r & s \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} u_1 & -v_1 & b_1 - a_1 \\ u_2 & -v_2 & b_2 - a_2 \\ u_3 & -v_3 & b_3 - a_3 \end{array}\right) \end{array},$$

das mit Hilfe des Gauß-Algorithmus in Dreiecksgestalt umgeformt wird. Die auftretenden Arten von Endtableaus haben dann eine der folgenden Gestalten:

a) $\left(\begin{array}{cc|c} * & (*) & (*) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

=> 2., 3. Zeile als Nullzeilen => Geraden sind identisch: g = h

b) $\left(\begin{array}{cc|c} * & (*) & (*) \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

=> 2. Zeile mit Widerspruch, 3. Zeile als Nullzeile => Geraden sind parallel: g || h

c) $\left(\begin{array}{cc|c} * & (*) & (*) \\ 0 & * & (*) \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

=> 3. Zeile als Nullzeile => Geraden schneiden sich im Schnittpunkt S: g∩h = {S}
(Zur Bestimmung des Schnittpunkts S ist dann nur der Parameter s auszurechnen und in die Gleichung der Geraden h einzusetzen.)

d) $\left(\begin{array}{cc|c} * & (*) & (*) \\ 0 & * & (*) \\ 0 & 0 & * \end{array}\right)$

=> 3. Zeile mit Widerspruch => Geraden sind windschief: g, h windschief
(*: reelle Zahl ≠ 0, (*): reelle Zahl ≠ 0 oder = 0).

II. Für beliebiges a≠0 ist die jeweilige Lagebeziehung zwischen der Gerade $g_a$ und Gerade h zu untersuchen. Das bedeutet das Gleichsetzen der Parametergleichungen der Geraden, also:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1/a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad | - s\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$t\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1/a \end{pmatrix} - s\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$s\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1/a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$$

Der Übergang zum Anfangstableau des Gaußverfahrens bringt dann:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ -4 & a & -2 \\ -1 & 1/a & -0{,}5 \end{array}\right),$$

so dass nun der Gauß-Algorithmus greift:

<u>Vertauschen</u>: (*1*) <-> (*3*) /

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1/a & -0{,}5 \\ -4 & a & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

<u>1. Schritt</u>: 1*(*2*) – 4*(*1*) /

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1/a & -0{,}5 \\ 0 & a - 4/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dem Endtableau des Gaußverfahrens

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1/a & -0{,}5 \\ 0 & a - 4/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ist nun zu entnehmen, dass es keine Widersprüche enthält. D.h. aber, dass die Gerade h auf jeden Fall jede Gerade des Geradenbüschels $g_a$ mindestens schneidet. Der Schnittpunkt ist im Fall $a - 4/a \neq 0$ wegen t = 0 der gemeinsame Stützvektor des Geradenbüschels $g_a$ mit S(4|-1|2,5). Im Fall $a - 4/a = 0$ (*) erhalten wir wegen

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1/a & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

als Endtableaux die Identität zwischen der Geraden h und einer Geraden $g_a$. Den zu dieser Geraden $g_a$ gehörenden Parameter a erhalten wir durch Ausrechnen der Gleichung (*):

$a - 4/a = 0$ | $\cdot a$
$a^2 - 4 = 0$ | $+4$
$a^2 = 4$ | $\sqrt{}$
$a = \pm 2$.

Nun ist – wie leicht auf Grund der Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ als Gegenvektoren zu sehen ist – die Gerade $g_{-2}$ mit der Geraden $g_2$ identisch, so dass es in der Tat eine Gerade $g_2$ gibt, die mit der Geraden h übereinstimmt: $h = g_2$.

www.michael-buhlmann.de / 04.2021 / Aufgabe 1385