

Mathematikaufgaben

> Vektorrechnung

> Geraden

Aufgabe: Gegeben ist die Gerade g mit:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Spurpunkte der Geraden. Zeichne die Gerade ein in ein kartesisches x_1 - x_2 - x_3 -Koordinatensystem.

Lösung: I. Zur Ermittlung der Spurpunkte einer Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ als Schnittpunkte

der Geraden mit den Grundebenen des x_1 - x_2 - x_3 -Koordinatensystems sind die einzelnen Komponenten (Koordinaten) der Geraden(gleichung) jeweils gleich Null zu setzen und aus den drei entstehenden Gleichungen jeweils, falls möglich, der Geradenparameter t zu berechnen. Einsetzen der berechneten Parameter in die Geradengleichung führt zu den Spurpunkten. Im Einzelnen gilt:

$$\text{Gerade } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Geradenkomponenten } x_1 = a_1 + tu_1, x_2 = a_2 + tu_2, x_3 = a_3 + tu_3 \rightarrow$$

Spurpunkt S_{23} auf der x_2 - x_3 -Grunde Ebene des Koordinatensystems:

$$x_1 = a_1 + tu_1 = 0 \Leftrightarrow tu_1 = -a_1 \Leftrightarrow t = -a_1/u_1 \rightarrow \vec{OS}_{23} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \frac{a_1}{u_1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 - \frac{a_1}{u_1}u_2 \\ a_3 - \frac{a_1}{u_1}u_3 \end{pmatrix} \rightarrow S_{23} (u_1 \neq 0)$$

Spurpunkt S_{13} auf der x_1 - x_3 -Grunde Ebene des Koordinatensystems:

$$x_2 = a_2 + tu_2 = 0 \Leftrightarrow tu_2 = -a_2 \Leftrightarrow t = -a_2/u_2 \rightarrow \vec{OS}_{13} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \frac{a_2}{u_2} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - \frac{a_2}{u_2}u_1 \\ 0 \\ a_3 - \frac{a_2}{u_2}u_3 \end{pmatrix} \rightarrow S_{13} (u_2 \neq 0)$$

Spurpunkt S_{12} auf der x_1 - x_2 -Grunde Ebene des Koordinatensystems:

$$x_3 = a_3 + tu_3 = 0 \Leftrightarrow tu_3 = -a_3 \Leftrightarrow t = -a_3/u_3 \rightarrow \vec{OS}_{12} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \frac{a_3}{u_3} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - \frac{a_3}{u_3}u_1 \\ a_2 - \frac{a_3}{u_3}u_2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow S_{12} (u_3 \neq 0)$$

Der jeweilige Spurpunkt existiert nicht, wenn im Richtungsvektor der Geraden $u_1=0$, $u_2=0$ oder $u_3=0$ gilt. Die Gerade liegt dann parallel zu (oder auf) der Grundebene des x_1 - x_2 - x_3 -Koordinatensystems, hinsichtlich der die Gerade keinen Spurpunkt besitzt. Spurpunkte, deren Komponenten mehr als eine Null enthalten, sind Spurpunkte auf den Achsen oder der Ursprung $O(0|0|0)$ des x_1 - x_2 - x_3 -Koordinatensystems

II. Wir zerlegen die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ in die einzelnen Komponenten:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 + 2t \\ x_2 &= -6 + 3t \\ x_3 &= -2 - t \end{aligned}$$

und bestimmen (in etwas modifizierter Form) die Spurpunkte (nach dem Schema in I.) wie folgt:

Spurpunkt S_{23} : Nullsetzen der x_1 -Komponente der Geraden g führt auf die Gleichung bzw. die Gleichungsumformungen:

$$x_1 = 4 + 2t = 0 \Leftrightarrow 4 + 2t = 0 \Leftrightarrow 2t = -4 \Leftrightarrow t = -2.$$

Einsetzen des gefundenen Parameters $t=-2$ in die Geradengleichung von g ergibt:

$$g \rightarrow OS_{23} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow S_{23}(0|-12|0).$$

Der Spurpunkt $S_{23}(0|-12|0)$ besitzt zwei Komponenten mit Wert 0, liegt also auf x_2 -Achse des Koordinatensystems und ist damit auch Spurpunkt auf der x_1 - x_2 -Grundebene. Es gilt damit: $S_{12}(0|-12|0) = S_{23}(0|-12|0)$.

Spurpunkt S_{13} : Nullsetzen der x_2 -Komponente der Geraden g führt auf die Gleichung bzw. die Gleichungsumformungen:

$$x_2 = -6 + 3t = 0 \Leftrightarrow -6 + 3t = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Einsetzen des gefundenen Parameters $t=2$ in die Geradengleichung von g ergibt:

$$g \rightarrow OS_{13} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \rightarrow S_{13}(8|0|-4).$$

Spurpunkt S_{12} : s.o.

Die Spurpunkte der Geraden g als Schnittpunkte der Geraden mit den Grundebenen des x_1 - x_2 - x_3 -Koordinatensystems lauten also:

Spurpunkt auf der x_2 - x_3 -Grundebene und x_1 - x_2 -Grundebene und damit auf der x_2 -Achse:

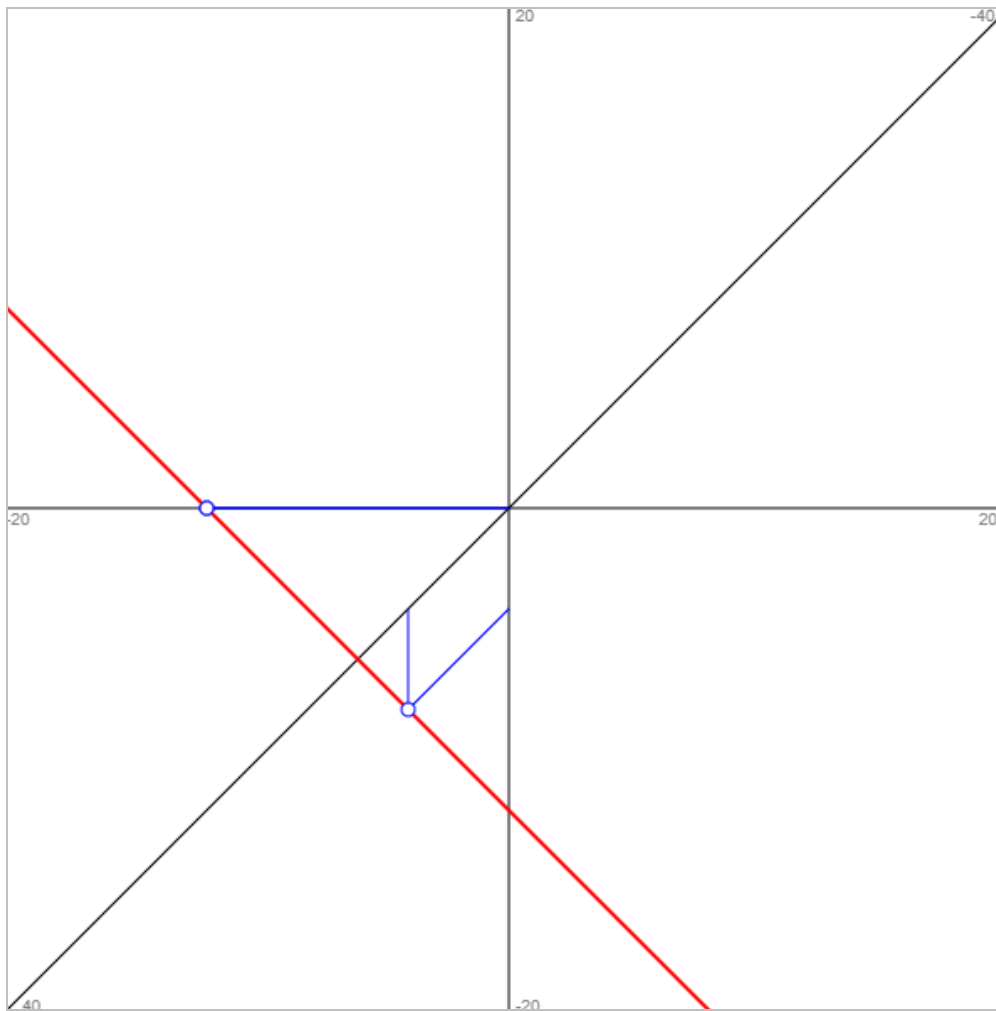
$$S_{12}(0|-12|0) = S_{23}(0|-12|0)$$

Spurpunkt auf der x_1 - x_3 -Grundebene: $S_{13}(8|0|-4)$.

III. Die Spurpunkte lassen sich auf den Grundebenen des Koordinatensystems besonders leicht

eintragen (mindestens eine Komponente ist ja 0), die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ verläuft dann

durch die zwei Spurpunkte $S_{12}(0|-12|0) = S_{23}(0|-12|0)$, $S_{13}(8|0|-4)$. Es gilt damit die folgende Geradenzeichnung:



www.michael-buhlmann.de / 03.2022 / Aufgabe 1601