Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Geraden

Aufgabe: Gegeben ist die Gerade g mit:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Spurpunkte der Geraden. Zeichne die Gerade ein in ein kartesisches x_1-x_2-x_3-Koordinatensystem.

Lösung: I. Zur Ermittlung der Spurpunkte einer Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ als Schnittpunkte der Geraden mit den Grundebenen des x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems sind die einzelnen Komponenten (Koordinaten) der Geraden(gleichung) jeweils gleich Null zu setzen und aus den drei entstehenden Gleichungen jeweils, falls möglich, der Geradenparameter t zu berechnen. Einsetzen der berechneten Parameter in die Geradengleichung führt zu den Spurpunkten. Im Einzelnen gilt:

Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ -> Geradenkomponenten $x_1 = a_1 + tu_1$, $x_2 = a_2 + tu_2$, $x_2 = a_2 + tu_2$ ->

Spurpunkt S_{23} auf der x_2-x_3-Grundebene des Koordinatensystems:

$x_1 = a_1 + tu_1 = 0 \Leftrightarrow tu_1 = -a_1 \Leftrightarrow t = -a_1/u_1$ -> $\vec{OS}_{23} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \frac{a_1}{u_1}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 - \frac{a_1}{u_1}u_2 \\ a_3 - \frac{a_1}{u_1}u_3 \end{pmatrix}$ -> S_{23} ($u_1 \neq 0$)

Spurpunkt S_{13} auf der x_1-x_3-Grundebene des Koordinatensystems:

$x_2 = a_2 + tu_2 = 0 \Leftrightarrow tu_2 = -a_2 \Leftrightarrow t = -a_2/u_2$ -> $\vec{OS}_{13} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \frac{a_2}{u_2}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - \frac{a_2}{u_2}u_1 \\ 0 \\ a_3 - \frac{a_2}{u_2}u_3 \end{pmatrix}$ -> S_{13} ($u_2 \neq 0$)

Spurpunkt S_{12} auf der x_1-x_2-Grundebene des Koordinatensystems:

$x_3 = a_3 + tu_3 = 0 \Leftrightarrow tu_3 = -a_3 \Leftrightarrow t = -a_3/u_3$ -> $\vec{OS}_{12} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \frac{a_3}{u_3}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - \frac{a_3}{u_3}u_1 \\ a_2 - \frac{a_3}{u_3}u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ -> S_{12} ($u_3 \neq 0$)

Der jeweilige Spurpunkt existiert nicht, wenn im Richtungsvektor der Geraden $u_1=0$, $u_2=0$ oder $u_3=0$ gilt. Die Gerade liegt dann parallel zu (oder auf) der Grundebene des x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems, hinsichtlich der die Gerade keinen Spurpunkt besitzt. Spurpunkte, deren Komponenten mehr als eine Null enthalten, sind Spurpunkte auf den Achsen oder der Ursprung O(0|0|0) des x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems

II. Wir zerlegen die Gerade g: $\overset{->}{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ in die einzelnen Komponenten:

$x_1 = 5$
$x_2 = -2 + 4t$
$x_3 = 4 + t$

und bestimmen die Spurpunkte (nach dem Schema in I.) wie folgt:

Spurpunkt S_{23}: Nullsetzen der x_1-Komponente der Geraden g führt auf die Gleichung:

$x_1 = 5 = 0$,

die keine Lösung hat, weil der Richtungsvektor der Geraden in seiner 1. Koordinate 0 ist. Smotz gibt es keinen Geradenspurpunkt auf der x_2-x_3-Ebene.

Spurpunkt S_{13}: Nullsetzen der x_2-Komponente der Geraden g führt auf die Gleichung bzw. die Gleichungsumformungen:

$x_2 = -2 + 4t = 0 \Leftrightarrow -2 + 4t = 0 \Leftrightarrow 4t = 2 \Leftrightarrow t = 0{,}5$.

Einsetzen des gefundenen Parameters t=0,5 in die Geradengleichung von g ergibt:

g -> $\overset{->}{OS_{13}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$ -> S_{13}(5|0|4,5).

Spurpunkt S_{12}: Nullsetzen der x_3-Komponente der Geraden g führt auf die Gleichung bzw. die Gleichungsumformungen:

$x_3 = 4 + t = 0 \Leftrightarrow 4 + t = 0 \Leftrightarrow t = -4$.

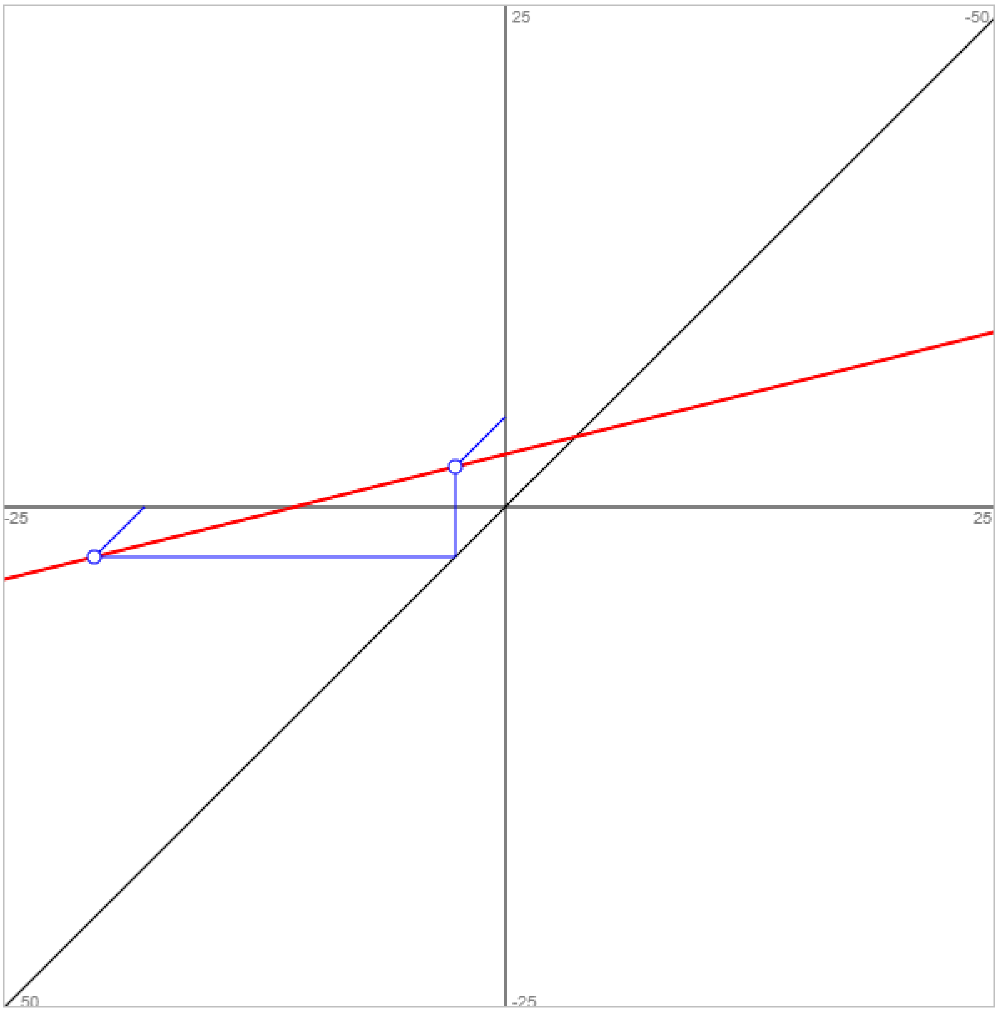
Einsetzen des gefundenen Parameters t=-4 in die Geradengleichung von g ergibt:

g -> $\overset{->}{OS_{12}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -18 \\ 0 \end{pmatrix}$ -> S_{12}(5|-18|0).

Die Spurpunkte der Geraden g als Schnittpunkte der Geraden mit den Grundebenen des x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems lauten also:

Spurpunkt auf der x_2-x_3-Grundebene: kein Spurpunkt S_{23}
Spurpunkt auf der x_1-x_3-Grundebene: S_{13}(5|0|4,5)
Spurpunkt auf der x_1-x_2-Grundebene: S_{12}(5|-18|0).

III. Die Spurpunkte lassen sich auf den Grundebenen des Koordinatensystems besonders leicht eintragen (eine Komponente ist ja 0), die Gerade g: $\overset{->}{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ verläuft dann durch die zwei Spurpunkte S_{12}(5|-18|0), S_{13}(5|0|4,5). Es gilt damit die folgende Geradenzeichnung:



www.michael-buhlmann.de / 03.2022 / Aufgabe 1602