Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Hoch-/Tiefpunkte

Aufgabe: Die ganz rationale Funktion 2. Grades:

$$f(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{3}x + 3$$

ist auf Hoch- und Tiefpunkte hin zu untersuchen sowie auf Monotonie.

Lösung: I. a) Allgemein ist bei der Untersuchung einer differenzierbaren Funktion f(x) auf Hoch- und Tiefpunkte als Extrempunkte (Punkte mit waagerechter Tangente) zu beachten:

f'(x) = 0 => x_1, … als Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

f''(x_1) > 0 => relatives Minimum/Tiefpunkt T(x_1|f(x_1))
f''(x_1) < 0 => relatives Maximum/Hochpunkt H(x_1|f(x_1)) (hinreichende Bedingung)

bzw.:

f'(x) = 0 => x_1, … als Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

f'(x_1-h)<0, f'(x_1)=0, f'(x_1+h)>0 für ein gewisses positives h nahe 0 => Vorzeichenwechsel der Ableitung von – nach + => Tiefpunkt T(x_1|f(x_1))
f'(x_1-h)>0, f'(x_1)=0, f'(x_1+h)<0 für ein gewisses positives h nahe 0 => Vorzeichenwechsel der Ableitung von + nach – => Hochpunkt H(x_1|f(x_1))
f'(x_1-h)>0, f'(x_1)=0, f'(x_1+h)>0 für ein gewisses positives h nahe 0 => kein Vorzeichenwechsel => Sattelpunkt S(x_1|f(x_1))
f'(x_1-h)<0, f'(x_1)=0, f'(x_1+h)<0 für ein gewisses positives h nahe 0 => kein Vorzeichenwechsel => Sattelpunkt S(x_1|f(x_1)) (hinreichende Bedingung).

b) Bei einer differenzierbaren Funktion f(x) mit Definitionsbereich D_f =**R** ergibt sich als (streng) steigende/fallende Monotonie in (offenen) Monotonieintervallen bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall:

Monotonieintervall (-∞, x_1): f(x) monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, f'(x_0)>0) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, f'(x_0)<0)
Monotonieintervall (x_1, x_2): f(x) monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie f'(x_0)>0); …
Monotonieintervall (x_n, ∞): f(x) monoton fallend (x_n als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, f'(x_0)>0).

Bei einem Sattelpunkt ändert sich die (strenge) Monotonie nicht, so dass die Monotonieintervalle Sattelpunkte immer enthalten.

II. Wir bestimmen den Tiefpunkt als einzigen Extrempunkt der Funktion $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{3}x + 3$, indem wir zunächst die 1. und 2. Ableitung bilden (Ableiten gemäß Summenregel, Potenzregel und Regel mit konstantem Faktor):

$$f'(x) = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$f''(x) = \frac{1}{3}.$$

Nullsetzen der 1. Ableitung (notwendige Bedingung) führt auf die Gleichungsumformungen:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} = 0 \Leftrightarrow x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5,$$

so dass x=-5 die Stelle ist, an der die Funktion f(x) eine waagerechte Tangente besitzt. Einsetzen von x=-5 in die 2. Ableitung ergibt:

$$f''(-5) = \frac{1}{3} > 0$$

und mithin den Nachweis eines Tiefpunktes an der Stelle x=-5. Wegen

$$f(-5) = \frac{1}{6}(-5)^2 + \frac{5}{3}(-5) + 3 = -\frac{7}{6}$$

besitzt die Funktion f(x) den Tiefpunkt T(-5|-7/6).

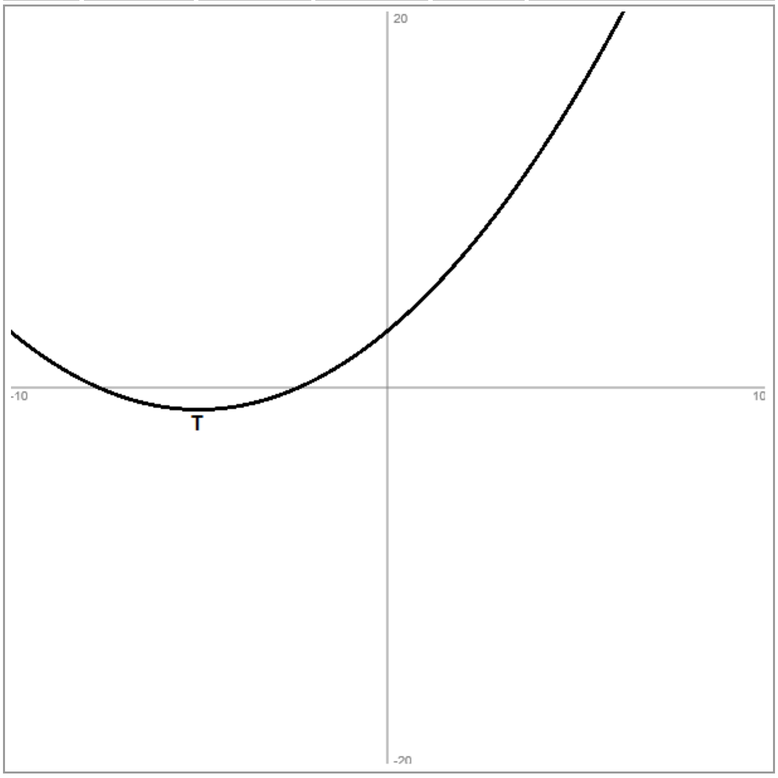
III. Der Tiefpunkt unterteilt den Definitionsbereich D_f = **R** der Funktion f(x) in die zwei Monotonieintervalle (-∞; -5) und (-5; ∞):

(-∞; -5)	x=-5	(-5; ∞)
↘	Tiefpunkt	↗
f monoton fallend		f monoton steigend

Hinsichtlich der <u>Monotonie</u> der Funktion ist damit festzuhalten: f(x) ist (streng) monoton fallend im Intervall (-∞; -5) und (streng) monoton steigend im Intervall (-5; ∞).

IV. <u>Wertetabelle, Zeichnung</u>:

x	**y = f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**f'''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-7.64	0	-0.88	0.3333	0	Nullstelle N(-7.64|0)
-5	-1.1667	0	0.3333	0	Tiefpunkt T(-5|-1.17)
-2.35	0	0.8833	0.3333	0	Nullstelle N(-2.35|0)
0	3	1.6667	0.3333	0	Schnittpunkt S_y(0|3)



www.michael-buhlmann.de / 04.2018 / Aufgabe 554