

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Hoch-/Tiefpunkte

Aufgabe: Die ganz rationale Funktion 3. Grades:

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

ist auf Hoch- und Tiefpunkte hin zu untersuchen sowie auf Monotonie.

Lösung: I. a) Allgemein ist bei der Untersuchung einer differenzierbaren Funktion $f(x)$ auf Hoch- und Tiefpunkte als Extrempunkte (Punkte mit waagerechter Tangente) zu beachten:

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1, \dots$ als Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

$f''(x_1) > 0 \Rightarrow$ relatives Minimum/Tiefpunkt $T(x_1|f(x_1))$

$f''(x_1) < 0 \Rightarrow$ relatives Maximum/Hochpunkt $H(x_1|f(x_1))$ (hinreichende Bedingung)

bzw.:

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1, \dots$ als Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

$f'(x_1-h) < 0, f'(x_1) = 0, f'(x_1+h) > 0$ für ein gewisses positives h nahe $0 \Rightarrow$ Vorzeichenwechsel der Ableitung von $-$ nach $+$ \Rightarrow Tiefpunkt $T(x_1|f(x_1))$

$f'(x_1-h) > 0, f'(x_1) = 0, f'(x_1+h) < 0$ für ein gewisses positives h nahe $0 \Rightarrow$ Vorzeichenwechsel der Ableitung von $+$ nach $-$ \Rightarrow Hochpunkt $H(x_1|f(x_1))$

$f'(x_1-h) > 0, f'(x_1) = 0, f'(x_1+h) > 0$ für ein gewisses positives h nahe $0 \Rightarrow$ kein Vorzeichenwechsel \Rightarrow Sattelpunkt $S(x_1|f(x_1))$

$f'(x_1-h) < 0, f'(x_1) = 0, f'(x_1+h) < 0$ für ein gewisses positives h nahe $0 \Rightarrow$ kein Vorzeichenwechsel \Rightarrow Sattelpunkt $S(x_1|f(x_1))$ (hinreichende Bedingung).

Bei einer differenzierbaren Funktion $f(x)$ mit Definitionsbereich $D_f = \mathbf{R}$ ergibt sich als (streng) steigende/fallende Monotonie in (offenen) Monotonieintervallen bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten x_1, x_2, \dots, x_n mit $x_1 < x_2 < \dots < x_n, x_0$ als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall:

b) Monotonieintervall $(-\infty, x_1)$: $f(x)$ monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, $f'(x_0) > 0$) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, $f'(x_0) < 0$)

Monotonieintervall (x_1, x_2) : $f(x)$ monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, $f'(x_0) < 0$) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie $f'(x_0) > 0$); ...

Monotonieintervall (x_n, ∞) : $f(x)$ monoton fallend (x_n als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie $f'(x_0) < 0$) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, $f'(x_0) > 0$).

Bei einem Sattelpunkt ändert sich die (strenge) Monotonie nicht, so dass die Monotonieintervalle Sattelpunkte immer enthalten.

II. Wir bestimmen den Hoch- und Tiefpunkt als Extrempunkte der Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2$, indem wir zunächst die 1. und 2. Ableitung bilden (Ableiten gemäß Summenregel, Potenzregel und Regel mit konstantem Faktor):

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f''(x) = 6x - 6.$$

Nullsetzen der 1. Ableitung (notwendige Bedingung) führt auf die Gleichungsumformungen:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(3x - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 0, 3x = 6 \Leftrightarrow x = 0, x = 2,$$

so dass $x=0$ und $x=2$ die Stellen sind, an denen die Funktion $f(x)$ jeweils eine waagerechte Tangente besitzt. Einsetzen von $x=0$ in die 2. Ableitung ergibt:

$$f''(0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6 < 0$$

und mithin den Nachweis eines Hochpunktes an der Stelle $x=0$. Entsprechend gilt für die Stelle $x=2$:

$$f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6 > 0$$

und damit das Vorhandensein eines Tiefpunktes. Die y-/Funktionswerte von Hoch- und Tiefpunkt errechnen sich als:

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$$

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = 8 - 12 = -4.$$

Die Funktion $f(x)$ besitzt damit den Hochpunkt $H(0|0)$ und den Tiefpunkt $T(2|-4)$.

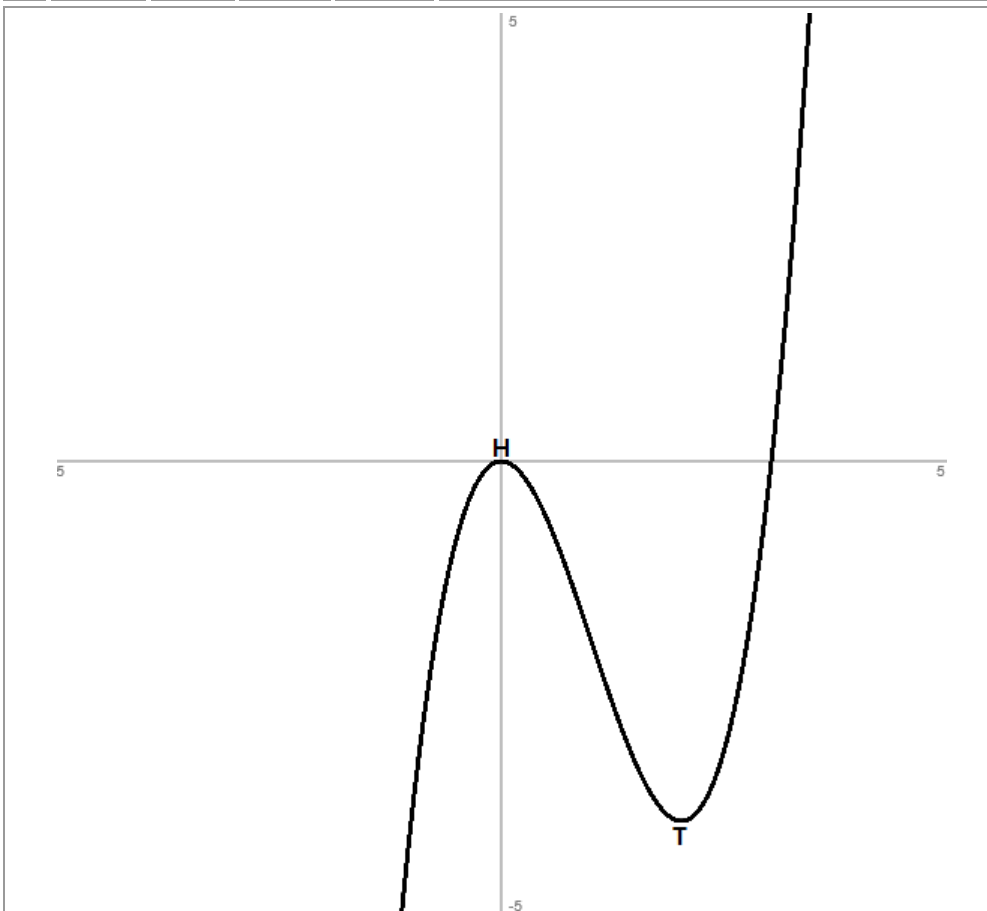
III. Die zwei Extrempunkte unterteilen den Definitionsbereich $D_f = \mathbf{R}$ der Funktion $f(x)$ in die drei Monotonieintervalle $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ und $(2; \infty)$, für die gilt:

Hoch-/Tiefpunkt	Monotonieintervall	Monotonie
Hochpunkt $H(0 0)$	$(-\infty; 0)$	$f(x)$ ist (streng) monoton steigend
	$(0; 2)$	$f(x)$ ist (streng) monoton fallend
Tiefpunkt $T(2 -4)$	$(2; \infty)$	$f(x)$ ist (streng) monoton steigend

Hinsichtlich der Monotonie der Funktion ist damit festzuhalten: $f(x)$ ist (streng) monoton steigend im Intervall $(-\infty; 0)$, (streng) monoton fallend im Intervall $(0; 2)$ und (streng) monoton steigend im Intervall $(2; \infty)$.

IV. Wertetabelle, Zeichnung:

x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	0	-6	6	Nullstelle $N(0 0)$ = Schnittpunkt $S_y(0 0)$ = Hochpunkt $H(0 0)$
1	-2	-3	0	6	Wendepunkt $W(1 -2)$
2	-4	0	6	6	Tiefpunkt $T(2 -4)$
3	0	9	12	6	Nullstelle $N(3 0)$



www.michael-buhlmann.de / 04.2018 / Aufgabe 555