Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Hoch-/Tiefpunkte

Aufgabe: Die Parameterfunktion:

$$f_t(x) = \frac{1 + x\sin(tx)}{1 + x^2} \text{, t reell}$$

ist an der Stelle x = 0 auf eventuelle Hoch- und Tiefpunkte zu untersuchen.

Lösung: I. Allgemein ist bei der Untersuchung einer differenzierbaren Funktion f(x) auf Hoch- und Tiefpunkte als Extrempunkte (Punkte mit waagerechter Tangente) zu beachten:

f‘(x) = 0 => x_1, … als Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

f‘‘(x_1) > 0 => relatives Minimum/Tiefpunkt T(x_1|f(x_1))
f‘‘(x_1) < 0 => relatives Maximum/Hochpunkt H(x_1|f(x_1)) (hinreichende Bedingung)

bzw.:

f‘(x) = 0 => x_1, … als Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

f‘(x_1-h)<0, f‘(x_1)=0, f‘(x_1+h)>0 für ein gewisses positives h nahe 0 => Vorzeichenwechsel der Ableitung von – nach + => Tiefpunkt T(x_1|f(x_1))
f‘(x_1-h)>0, f‘(x_1)=0, f‘(x_1+h)<0 für ein gewisses positives h nahe 0 => Vorzeichenwechsel der Ableitung von + nach – => Hochpunkt H(x_1|f(x_1))
f‘(x_1-h)>0, f‘(x_1)=0, f‘(x_1+h)>0 für ein gewisses positives h nahe 0 => kein Vorzeichenwechsel => Sattelpunkt S(x_1|f(x_1))
f‘(x_1-h)<0, f‘(x_1)=0, f‘(x_1+h)<0 für ein gewisses positives h nahe 0 => kein Vorzeichenwechsel => Sattelpunkt S(x_1|f(x_1)) (hinreichende Bedingung).

II. Zunächst vermerken wir die Achsensymmetrie jeder Parameterfunktion $f_t(x)$ zur y-Achse des x-y-Koordinatensystems. Denn es gilt: y = x und y = sin(tx) sind punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems, womit ihr Produkt y = x·sin(tx) achsensymmetrisch zur y-Achse ist. Im Zähler und Nenner von $f_t(x)$ stehen somit Summen mit achsensymmetrischen Summanden, so dass die die Summenfunktionen wiederum achsensymmetrisch sind. Der Bruch $f_t(x)$ von zwei achsensymmetrischen Funktionen ist aber achsensymmetrisch zur y-Achse.

III. Wir folgern aus der Achsensymmetrie zur y-Achse, dass jede an der Stelle x = 0 definierte Funktion $f_t(x)$, die ja keine konstante Funktion ist, auf der y-Achse einen Extrempunkt haben muss.

IV. Nun gilt für die Ableitungen von $f_t(x)$ nach der Quotientenregel:

$$f_t'(x)=\frac{(1\cdot\sin(tx)+tx\cos(tx))\cdot(1+x^2)-(1+x\sin(tx))\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{\sin(tx)+x^2\sin(tx)+tx\cos(tx)+tx^3\cos(tx)-2x^2\sin(tx)-2x}{(1+x^2)^2}=$$

$$\frac{\sin(tx)-x^2\sin(tx)+tx\cos(tx)+tx^3\cos(tx)-2x}{(1+x^2)^2}=\frac{(1-x^2)\sin(tx)+t(x+x^3)\cos(tx)-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f_t''(x)=$$

$$\frac{(-2x\sin(tx)+t(1-x^2)\cos(tx)+t(1+3x^2)\cos(tx)-t^2(x+x^3)\sin(tx)-2)(1+x^2)^2-((1-x^2)\sin(tx)+t(x+x^3)\cos(tx)-2x)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}$$

V. An der Stelle x = 0 gilt:

$$f_t(0)=\frac{1+0\cdot\sin(t\cdot 0)}{1+0^2}=\frac{1+0}{1+0}=1$$

$$f_t'(0)=\frac{(1-0^2)\sin(t\cdot 0)+t(0+0^3)\cos(t\cdot 0)-2\cdot 0}{(1+0^2)^2}=\frac{1\cdot 0+0\cdot 1-0}{(1+0)^2}=\frac{0}{1}=0$$

$$f_t''(0)=\frac{(-2\cdot 0\cdot\sin(t\cdot 0)+t(1-0^2)\cos(t\cdot 0)+t(1+3\cdot 0^2)\cos(t\cdot 0)-t^2(0+0^3)\sin(t\cdot 0)-2)(1+0^2)^2-0\cdot 2(1+0^2)\cdot 2\cdot 0}{(1+0^2)^4}=$$

$$\frac{(0+t+t-0-2)(1+0)^2-0}{(1+0)^4}=\frac{(2t-2)\cdot 1}{1}=2t-2$$

Mit $f_t(0) = 1$ ist nach dem oben (III.) Gesagten der Punkt P(0|1) ein Extrempunkt für alle Funktionen $f_t(x)$, ablesbar auch an der 1. Ableitung $f_t'(0) = 0$ (Existenz einer waagerechten Tangente an der Stelle x = 0). Die Art des Extremums ergibt sich aus der 2. Ableitung $f_t''(0) = 2t–2$. Wir rechnen zunächst:

$f_t''(0) = 0 \Leftrightarrow 2t – 2 = 0 \Leftrightarrow 2t = 2 \Leftrightarrow t = 1$.

Dann ist für t>1 die 2. Ableitung $f_t''(0) > 0$, so dass im Punkt P(0|1) jede Funktion $f_t(x)$, t>1, einen Tiefpunkt besitzt, für t<1 die 2. Ableitung $f_t''(0) < 0$, so dass im Punkt P(0|1) für jedes t<1 ein Hochpunkt existiert. Unentscheidbar ist noch die Art des Extremums für t=1, da hierbei $f_1''(0) = 0$ gilt.

Wir betrachten also die Parameterfunktion für t=1 mit: $f_1(x)=\frac{1+x\sin(x)}{1+x^2}$ und haben die 1. Ableitung als: $f_1'(x)=\frac{(1-x^2)\sin(x)+(x+x^3)\cos(x)-2x}{(1+x^2)^2}$.

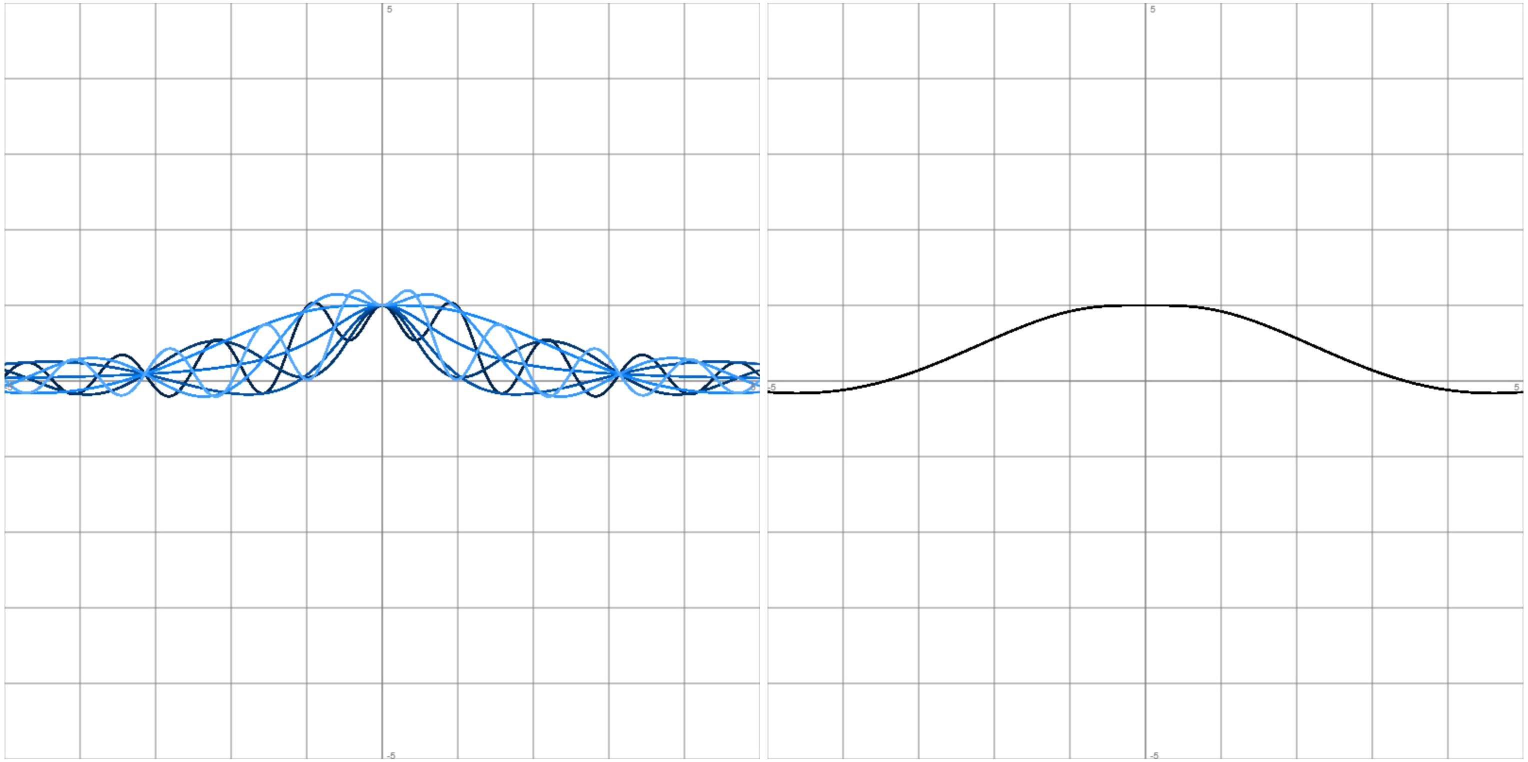
Wir untersuchen die 1. Ableitung $f_t'(x)$ auf Vorzeichenwechsel an der Stelle x = 0. Da P(0|1) Extremum ist, muss es solch einen Vorzeichenwechsel geben. Da die x =0 nächsten Extrempunkte die Tiefpunkte T_1(-4,6|-0,16), T_2(4,6|-0,16) sind, lässt sich der Vorzeichenwechsel anhand der Werte $f_1'(-\pi/2)$ und $f_1'(\pi/2)$ betrachten. Nun gilt auch wegen der Punktsymmetrie der 1. Ableitung um den Koordinatenursprung (Wechsel der Symmetrie beim Ableiten):

$$f_1'(\frac{\pi}{2})=\frac{(1-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2)\sin(\frac{\pi}{2})+(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}\right)^3)\cos(\frac{\pi}{2})-2\cdot\frac{\pi}{2}}{(1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2)^2}=\frac{(1-\frac{\pi^2}{4})-\pi}{(1+\frac{\pi^2}{4})^2}=-f_1'(-\frac{\pi}{2})<0$$

und damit: f_1‘(-π/2) > 0, f_1‘(π/2) < 0; es liegt also ein Vorzeichenwechsel der 1. Ableitung f_t‘(x) von + nach – vor. Mithin ist der Punkt P(0|1) ein Hochpunkt der Funktion f_1(x).

VI. Insgesamt besitzen die Parameterfunktionen f_t(x) für t≤1 den Hochpunkt, für t>1 den Tiefpunkt P(0|1).

VII. Parameterfunktionen f_t(x) (t=0, t=±1, t=±2, t=±5), Funktion f_1(x):



www.michael-buhlmann.de / 12.2020 / Aufgabe 1217