Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Hoch-/Tiefpunkte, Tangente, Streckenzug

Aufgabe: Die ganz rationale Funktion 3. Grades:

$$f(x) = \frac{1}{80}x^3 - \frac{3}{40}x^2 + 0{,}7$$

beschreibt im Intervall [-2,5; 6,5] den West-Ost-Querschnitt einer Landschaft als eines von Gebirgen umgebenen Tals (x: in Kilometern, y: in Kilometern Meereshöhe).

a) Wie hoch ist der Bergzug westlich des Tals? Auf welcher Höhe liegt die Talsohle? Wie groß ist Höhendifferenz?

b) Sind die Höhen von Bergzug und Talsohle globale Extrempunkte im Bereich des West-Ost-Querschnitts?

c) Wo ist der Westabhang des Tals am steilsten? Wie viel Prozent beträgt dort die Steigung? Wie groß ist dort der Steigungswinkel? Gibt es am Ostabhang des Tals steilere Stellen?

d) Auf dem höchsten Punkt des westlich des Tals gelegenen Bergzugs soll ein Sendemast errichtet werden, der in das gesamte Tal einstrahlt. Wie hoch muss der Mast gebaut werden?

e) Zur touristischen Erschließung des westlich des Tals gelegenen Bergzugs soll eine Luftseilbahn zum höchsten Punkt des Bergzugs gebaut werden. Die Talstation der Seilbahn liegt auf dem Westabhang des Tals, einen Kilometer Luftlinie von der Talsohle entfernt auf 370 Metern Meereshöhe, die Bergstation 5 Meter über dem höchsten Punkt des Bergzugs; auf halber West-Ost-Entfernung zwischen Berg- und Talstation befindet sich die sich 117 Meter über den Westabhang erhebende einzige Stütze der Seilbahn. Wie lang ist die gesamte Seilbahnstrecke? Wie groß sind ihre Steigungswinkel? Auf wie viel Meter nähert sich die Seilbahnstrecke dem senkrecht darunter liegenden westlichen Gebirgszug?

Lösung: a) I. Wir bestimmen die <u>Punkte mit waagerechter Tangente</u> der ganz rationalen Funktion $f(x) = \frac{1}{80}x^3 - \frac{3}{40}x^2 + 0{,}7$, indem wir zunächst die 1. und 2. Ableitung bilden (Ableiten gemäß Summenregel, Potenzregel und Regel mit konstantem Faktor):

$$f'(x) = \frac{3}{80}x^2 - \frac{3}{20}x$$

$$f''(x) = \frac{3}{40}x - \frac{3}{20}.$$

Nullsetzen der 1. Ableitung (notwendige Bedingung) führt auf die Gleichungsumformungen:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{80}x^2 - \frac{3}{20}x = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{3}{80}x - \frac{3}{20}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ \frac{3}{80}x - \frac{3}{20} = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ 3x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0,\ 3x = 12 \Leftrightarrow x = 0,\ \ x = 4\,,$$

so dass x=0 und x=4 die Stellen sind, an denen die Funktion f(x) jeweils eine waagerechte Tangente besitzt. Einsetzen der gefundenen Stellen in die 2. Ableitung (hinreichende Bedingung) ergibt:

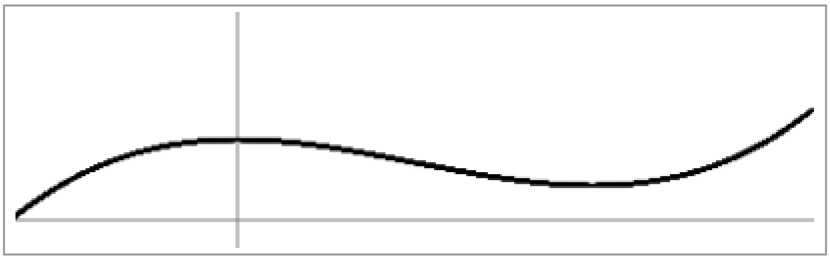
$f''(0) = \frac{3}{40}\cdot 0 - \frac{3}{20} = -\frac{3}{20} < 0$ => Hochpunkt bei x=0

$f''(4) = \frac{3}{40}\cdot 4 - \frac{3}{20} = \frac{3}{20} > 0$ => Tiefpunkt bei x=4 mit: f(0) = 0,7 und f(4) = $\frac{1}{80} \cdot 4^3 - \frac{3}{40} \cdot 4^2 + 0,7$ = 0,3, so dass im Intervall [-2,5; 6,5] die Funktion f(x) den <u>Hochpunkt</u> H(0|0,7) und den <u>Tiefpunkt</u> T(4|0,3) besitzt.

II. Bezogen auf die Fragestellungen in Teilaufgabe a) kann damit festgehalten werden: Der Bergzug westlich des Tals ist hat eine Meereshöhe von 0,7 km = 700 m, die Talsohle liegt 0,3 km = 300 m hoch, die Höhendifferenz zwischen Berg und Tal beträgt 400 m.

III. <u>Wertetabelle, Zeichnung</u> (Intervall [-2,5; 6,5]):

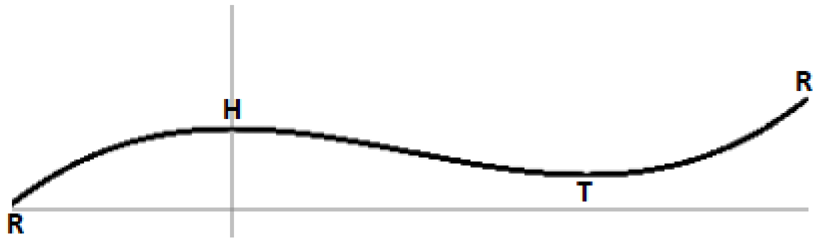
x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
[-2.55	0.005	0.6263	-0.3413	0.075	Nullstelle N(-2.55|0.01)]
0	0.7	0	-0.15	0.075	Schnittpunkt S_y(0|0.7) = Hochpunkt H(0|0.7)
2	0.5	-0.15	0	0.075	Wendepunkt W(2|0.5)
4	0.3	0	0.15	0.075	Tiefpunkt T(4|0.3)



b) Der Hochpunkt H(0|0,7) und der Tiefpunkt T(4|0,3) sind im Intervall [-2,5; 6,5] lokale Extrema der Funktion f(x). Dazu betrachten wir die nachstehende Tabelle, die auch die Randstellen des Intervalls mit einbezieht:

X	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	Randstellen Lokale Extrema
-2.5	0.0359	0.61	-0.34	Randstelle/-punkt R(-2.5|0.04)
0	0.7	0	-0.15	Hochpunkt H(0|0.7)
4	0.3	0	0.15	Tiefpunkt T(4|0.3)
6.5	0.9641	0.61	0.34	Randstelle/-punkt R(6.5|0.96)

Der tiefste Punkt des West-Ost-Querschnitts liegt (am Rand) bei R(-2,5|0,04) auf einer Meereshöhe von 0,04 km = 40 m, der höchste Punkt (am Rand) bei R(6,5|0,96) auf einer Meereshöhe von 0,96 km = 960 m. Die Randstellen des Intervalls sind also die <u>globalen Extrempunkte</u> der Funktion.



c) I. Die Landschaft ist dort (betragsmäßig) am steilsten, wo die 1. Ableitung der Funktion f(x) ein Minimum oder Maximum annimmt, d.h. wo die Funktion einen <u>Wendepunkt</u> besitzt. Gemäß:

$$f''(x) = \frac{3}{40}x - \frac{3}{20}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{40}$$

ergibt das Nullsetzen der 2. Ableitung (notwendige Bedingung):

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{40}x - \frac{3}{20} = 0 \Leftrightarrow 3x - 6 = 0 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$$

mit:

$$f'''(2) = \frac{3}{40} \cdot 2 = \frac{3}{20} \neq 0$$

(hinreichende Bedingung), so dass wegen f(2) = $\frac{1}{80}\cdot 2^3 - \frac{3}{40}\cdot 2^2 + 0{,}7$ = 0,5 bei W(2|0,5) in der Tat ein Wendepunkt vorliegt.

II. Die 1. Ableitung ist wegen f'''(2) > 0 im Wendepunkt minimal, es ist:

$$f'(2) = \frac{3}{80}\cdot 2^2 - \frac{3}{20}\cdot 2 = -\frac{3}{20},$$

so dass der Betrag des Ableitungswerts |f'(2)| = 0,15 eine <u>maximale Steigung</u> am Westabhang des Tals von 15 % ergibt. Dies entspricht einem <u>Steigungswinkel</u> von:

$\varphi = \tan^{-1}(0{,}15) = 8{,}53°$.

(gemäß der Beziehung: $\tan\varphi = f'(x)$). Der Ostabhang des Tals ist hingegen steiler, wie z.B. der Ableitungswert:

$$f'(6) = \frac{3}{80}\cdot 6^2 - \frac{3}{20}\cdot 6 = 0{,}9$$

(mit Steigungswinkel φ = 41,99°) beweist.

d) I. Damit der Sendemast auf dem Hochpunkt H(0|0,7) des Bergzugs westlich des Tals in das ganze Tal einstrahlen kann, muss die Sendemastspitze S auf der Wendetangente der Funktion f(x) liegen. Gemäß Aufgabenteil c) liegt der <u>Wendepunkt</u> bei W(2|0,5).

II. Die Bestimmung der <u>Wendetangente</u> erfolgt gemäß der Tangentenformel für eine Tangente an die Funktion f(x) an der Stelle x = u:

t: $y = f'(u)(x-u) + f(u)$.

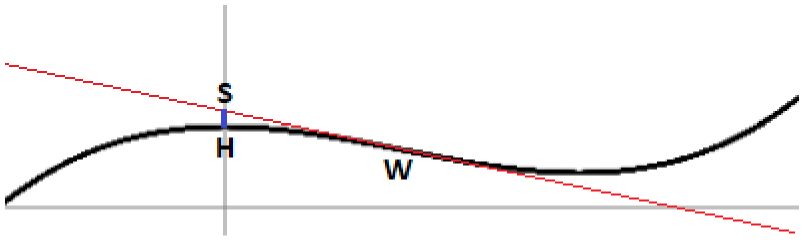
Für u=2, der Stelle des Wendepunktes W(2|0,5), ergibt sich somit:

t: $y = f'(2)(x-2) + f(2) = -\frac{3}{20}(x-2) + 0{,}5 = -\frac{3}{20}x + 0{,}8$.

Da der Sendemast selbstverständlich senkrecht auf dem Gebirgszug steht, errechnet sich die Mastspitze durch Einsetzen von x=0 (der x-Koordinate des Hochpunktes) in die Tangentengleichung:

y(0) = $-\frac{3}{20}\cdot 0 + 0{,}8$ = 0,8.

Damit liegt die Mastspitze S(0|0,8) über dem Hochpunkt H(0|0,7) 0,8–0,7 = 0,1 km = 100 m hoch. Der Sendemast muss also eine Höhe von 100 m haben.



e) I. Die Bergstation der geplanten Seilbahn befindet sich 0,005 km = 5 m über dem Hochpunkt H(0|0,7) im Punkt P(0|0,705), die Talstation an der Stelle x=3 im Punkt R(3|0,37) in einer Meereshöhe von 0,37 km = 370 m (es gilt dabei: 0,37 > f(3) = $\frac{1}{80}\cdot 3^3 - \frac{3}{40}\cdot 3^2 + 0{,}7$ = 0,3625), die Seilbahnstütze endet in 0,117 km = 117 m Höhe im Punkt Q(1,5|0,69) (mit: (3+0)/2 = 1,5 als x-Koordinate des Punktes, f(1,5)+0,117 = $\frac{1}{80}\cdot 1{,}5^3 - \frac{3}{40}\cdot 1{,}5^2 + 0{,}7$+0,117 = 0,573+0,117 = 0,69 als y-Koordinate).

Die Länge der Seilbahn entspricht ungefähr dem <u>Abstand</u> von Bergstation P zur Seilbahnstütze Q und von dort zur Talstation R im x-y-Koordinatensystem und errechnet sich gemäß der Abstandsformel:

$\overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ für Punkte $P(x_1|y_1)$, $Q(x_2|y_2)$

als:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(1{,}5-0)^2 + (0{,}69-0{,}705)^2} = 1{,}5,$$

$$\overline{QR} = \sqrt{(3-1{,}5)^2 + (0{,}37-0{,}69)^2} = 1{,}53.$$

Die Seilbahn hat also eine ungefähre Länge von 1,5 + 1,53 = 3,03 km.

II. Als Nächstes werden zwei <u>Geradenstücke</u> zwischen die Punkte P und Q bzw. Q und R gelegt, die als Näherung für die Seilbahnführung zwischen Tal- und Bergstation gelten können. Es errechnen sich für die Punkte P(0|0,705) und Q(1,5|0,69) als Geradensteigung m_{PQ} und y-Achsenabschnitt c_{PQ} und Geradengleichung:

$$m_{PQ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0{,}69 - 0{,}705}{1{,}5 - 0} = -\frac{1}{100} = -0{,}01,\quad c_{PQ} = y_1 - mx_1 = 0{,}705 - 0 = 0{,}705 \Rightarrow y = -0{,}01x + 0{,}705,$$

für die Punkte Q(1,5|0,69) und R(0|0,37):

$$m_{QR} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0{,}37 - 0{,}69}{3 - 1{,}5} = -\frac{16}{75},\quad c_{QR} = y_1 - mx_1 = 0{,}69 + \frac{16}{75} \cdot 1{,}5 = 1{,}01 \Rightarrow y = -\frac{16}{75}x + 1{,}01.$$

Die Geradengleichungen ergeben eine stückweise definierte Funktion der Seilbahnstrecke. Sie sind definiert auf den nachstehenden Intervallen :

$y = -0{,}01x+0{,}705$ auf [0; 1,5]

$y = -\frac{16}{75}x+1{,}01$ auf [1,5; 3].

Aus dem Betrag der Geradensteigungen ermitteln sich die <u>Steigungswinkel</u> als:

$\varphi_{PQ} = \tan^{-1}(0{,}001) = 0{,}57°$
$\varphi_{QR} = \tan^{-1}(16/75) = 12{,}04°$.

III. Es soll der minimale senkrechte Abstand zwischen den Geraden der Seilbahnstrecke und dem Westabhang des Tals errechnet werden. Dazu wird mit y als Geradengleichung und f(x) als die Landschaft definierende Funktion die Differenzfunktionen $d_{\cdot}(x) = y - f(x)$ gebildet. Es gilt:

$$d_{PQ}(x) = (-0{,}01x + 0{,}705) - \left(\frac{1}{80}x^3 - \frac{3}{40}x^2 + 0{,}7\right) = -\frac{1}{80}x^3 + \frac{3}{40}x^2 - 0{,}01x + 0{,}005 \text{ auf } [0;\ 1{,}5]$$

$$d_{QR}(x) = \left(-\frac{16}{75}x + 1{,}01\right) - \left(\frac{1}{80}x^3 - \frac{3}{40}x^2 + 0{,}7\right) = -\frac{1}{80}x^3 + \frac{3}{40}x^2 - \frac{16}{75}x + 0{,}31 \text{ auf } [1{,}5;\ 3].$$

Die Abstandsfunktionen $d_{\cdot}(x)$ sind positiv wegen y > f(x). Die <u>Minima der Abstandsfunktionen</u> finden sich als globale Minima in den nachstehenden Tabellen:

x	**y = d_{PQ}(x)**	**d_{PQ}'(x)**	**d_{PQ}''(x)**	**Randstellen Lokale Extrema**
0	0.005	-0.01	0.15	Randstelle/-punkt R(0|0.005)
0.067	0.0047	0	0.14	Tiefpunkt T(0.067|0.0047)
1.5	0.1166	0.13	0.04	Randstelle/-punkt R(1.5|0.12)

an der Stelle x=0,067 mit $d_{PQ}(0{,}067) = 0{,}0047$ bzw.:

x	**y =d_{QR}(x)**	**d_{QR}'(x)**	**d_{QR}''(x)**	**Randstellen Lokale Extrema**
1.5	0.1166	-0.07	0.04	Randstelle/-punkt R(1.5|0.12)
3	0.0075	-0.1	-0.07	Randstelle/-punkt R(3|0.0075)

an der Talstation x=3. Insgesamt nähert sich die Seilbahnstrecke bis auf 4,7 m dem Talabhang.