Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Uneigentliches Integral

Aufgabe: a) Die Fläche zwischen der Funktion $f(x)=e^{-0,2x+1}$ und der x-Achse ist auf dem Intervall [-2; ∞) ist zu bestimmen.

b) Für welches u ist der Unterschied zwischen der Teilfläche unter der Funktion $f(x)=e^{-0,2x+1}$ auf dem Intervall [-2; u] und der in a) errechneten Gesamtfläche auf dem Intervall [-2; ∞) auf 0,0001 gesunken?

Lösung: I. Uneigentliche Integrale hängen mit „uneigentlichen", weil unendlichen (unendlich langen, unendlich hohen) Flächen zusammen und ergeben sich, wenn auf einem endlichen Intervall [a; b] eine Funktion f(x) unbeschränkt ist (also eine Polstelle besitzt) oder wenn das Intervall als Integrationsbereich einer (beschränkten) Funktion f(x) unendliche Länge hat, also von der Form [a; ∞) oder (-∞; a] oder (-∞; ∞) ist. In jedem Fall führt man gegen die Unendlichkeitsstelle (hier: x_0 = a) oder gegen ±∞ (hier: +∞) einen Grenzprozess durch, d.h. für hier angenommene auf dem Intervall nicht negative Funktionen f(x) ergibt sich – die Existenz endlicher Grenzwerte vorausgesetzt – die (somit endliche) Fläche A als Grenzwert „eigentlicher" („Näherungs-") Flächen A(u) und somit als:

$$A(u)=\int_u^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_u^b=F(b)-F(u)\underset{u->a}{->}A=\int_a^b f(x)dx$$

im Fall der Polstelle x_0 = a mit reellem u mit b > u > a bzw.

$$A(u)=\int_a^u f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^u=F(u)-F(a)\underset{u->\infty}{->}A=\int_a^\infty f(x)dx$$

im Fall des unendlich großen Integrationsbereichs mit reellem u mit u > a.
Wichtig ist noch, wenn eine Funktion f(x) für x -> ∞ oder x -> -∞ gegen eine Asymptote y läuft; die unendlich lange Fläche ergibt sich hier als (endliche) Fläche zwischen Funktion und Asymptote.

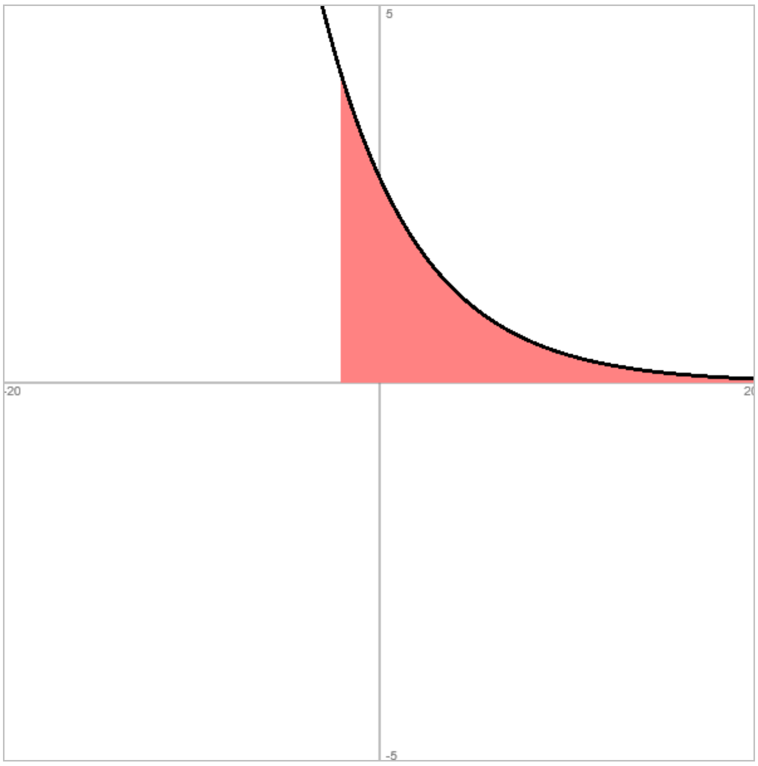
a) II. Das uneigentliche Integral (1. Art) $\int_{-2}^{\infty} e^{-0,2x+1}dx$ existiert wegen der folgenden Überlegungen:

Für die Funktion f(x) ist der Grenzprozess nach Einführung von u mit u>-2 durchzuführen:

$$A(u)=\int_{-2}^{u} e^{-0,2x+1}dx=\left[\frac{1}{-0,2}e^{-0,2x+1}\right]_{-2}^{u}=\left[-5e^{-0,2x+1}\right]_{-2}^{u}=-5e^{-0,2u+1}-(-5e^{-0,2\cdot\cdot(-2)+1})=5e^{1,4}-5e^{-0,2u+1}$$

$$\underset{u->\infty}{->}5e^{1,4}-5\cdot 0=5e^{1,4}=A=\int_0^\infty e^{-2x+3}dx\ ,$$

so dass sich die unendlich lange, endlich große Fläche A mit Flächeninhalt $5e^{1,4}$ ≈ 20,276 ergibt.



b) III. Wir betrachten beispielhaft für verschiedene u die Teilintegrale bzw. <u>Teilflächen</u> A(u) = $\int_{-2}^{u} e^{-0,2x+1}dx = \left[-5e^{-0,2x+1}\right]_{-2}^{u}$ mit der vorgegebenen Funktion $f(x)=e^{-0,2x+1}$ und ihrer Stammfunktion $F(x)=-5e^{-0,2x+1}$:

Teilflächen:	
u =	A(u) = $\int_{-2}^{u}$ f(x) *dx* =
-1	A(-1) = $\int_{-2}^{-1}$ f(x) *dx* = $[F(x)]_{-2}^{-1}$ = F(-1)-F(-2) = -16.600585+20.276 = 3.675415
0	A(0) = $\int_{-2}^{0}$ f(x) *dx* = $[F(x)]_{-2}^{0}$ = F(0)-F(-2) = -13.591409+20.276 = 6.684591
1	A(1) = $\int_{-2}^{1}$ f(x) *dx* = $[F(x)]_{-2}^{1}$ = F(1)-F(-2) = -11.127705+20.276 = 9.148295
2	A(2) = $\int_{-2}^{2}$ f(x) *dx* = $[F(x)]_{-2}^{2}$ = F(2)-F(-2) = -9.110594+20.276 = 11.165406
5	A(5) = $\int_{-2}^{5}$ f(x) *dx* = $[F(x)]_{-2}^{5}$ = F(5)-F(-2) = -5+20.276 = 15.276
10	A(10) = $\int_{-2}^{10}$ f(x) *dx* = $[F(x)]_{-2}^{10}$ = F(10)-F(-2) = -1.839397+20.276 = 18.436603
15	A(15) = $\int_{-2}^{15}$ f(x) *dx* = $[F(x)]_{-2}^{15}$ = F(15)-F(-2) = -0.676676+20.276 = 19.599323
20	A(20) = $\int_{-2}^{20}$ f(x) *dx* = $[F(x)]_{-2}^{20}$ = F(20)-F(-2) = -0.248935+20.276 = 20.027064
30	A(30) = $\int_{-2}^{30}$ f(x) *dx* = $[F(x)]_{-2}^{30}$ = F(30)-F(-2) = -0.03369+20.276 = 20.24231
50	A(50) = $\int_{-2}^{50}$ f(x) *dx* = $[F(x)]_{-2}^{50}$ = F(50)-F(-2) = -0.000617+20.276 = 20.275383
75	A(75) = $\int_{-2}^{75}$ f(x) *dx* = $[F(x)]_{-2}^{75}$ = F(75)-F(-2) = -0.000004+20.276 = 20.275996
100	A(100) = $\int_{-2}^{100}$ f(x) *dx* = $[F(x)]_{-2}^{100}$ = F(100)-F(-2) = 0+20.276 = 20.276

IV. Zur <u>Bestimmung</u> des u <u>der Teilfläche</u> A(u) = $\int_{-2}^{u} e^{-0,2x+1}dx = \left[-5e^{-0,2x+1}\right]_{-2}^{u}$ mit:

|A – A(u)| = 0,0001 (*)

ist die Gleichung (*) bei A = $\int_{0}^{\infty} e^{-2x+3}dx$ = $5e^{1,4}$ als Integralgleichung nach u aufzulösen, d.h.:

|A – A(u)| = 0,0001 (Betrag auflösen bei A > A(u) wegen f(x) > 0)

$A - A(u) = 0{,}0001$ $\qquad$ $\left(A(u) = \int_{-2}^{u} e^{-0{,}2x+1}\,dx\right)$

$5e^{1{,}4} - \int_{-2}^{u} e^{-0{,}2x+1}\,dx = 0{,}0001$ $\qquad$ (Stammfunktion einführen)

$5e^{1{,}4} - \left[-5e^{-0{,}2x+1}\right]_{-2}^{u} = 0{,}0001$ $\qquad$ (Grenzen einsetzen)

$5e^{1{,}4} - (5e^{1{,}4} - 5e^{-0{,}2u+1}) = 0{,}0001$ $\qquad$ (Klammer auflösen, Zusammenfassen)

$5e^{-0{,}2u+1} = 0{,}0001$ $\qquad$ | :5

$e^{-0{,}2u+1} = 0{,}00002$ $\qquad$ | ln()

$-0{,}2u+1 = \ln(0{,}00002)$ $\qquad$ | -1

$-0{,}2u = \ln(0{,}00002) - 1$ $\qquad$ | $\cdot(-5)$

$u = -5(\ln(0{,}00002)-1) \approx 59{,}1$

Für u = 59,1 besitzt also der Unterschied zwischen Teilfläche A(59,1) und uneigentlicher Gesamtfläche der Funktion $f(x)=e^{-0{,}2x+1}$ den Wert 0,0001.

Teilflächen A(u):