Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Ableitung eines bestimmten Integrals

Aufgabe: Zu berechnen ist die Ableitung der Funktion des bestimmten Integrals

$$I(x) = \int_{\sin x}^{3x} \cosh(\sqrt{t})dt.$$

Lösung: I. Unter Beachtung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung heben sich das Auf- und Ableiten einer Funktion gegenseitig auf. Bilden wir also zu einer integrierbaren Funktion f(t) zunächst das bestimmte Integral mit von x abhängigen Grenzen a(x) und b(x), so erhalten wir:

$$I(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt = \left[F(t)\right]_{a(x)}^{b(x)} = F(b(x)) - F(a(x)).$$

Ableiten ergibt nach der Kettenregel:

$$I'(x) = F'(b(x))b'(x) - F'(a(x))a'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x),$$

so dass insgesamt

$$\frac{d\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt\right)}{dx} = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$$

folgt.

II. Es gilt damit u.a. durch mehrfaches Anwenden der Kettenregel für das Ableiten:

$$I'(x) = \frac{d\left(\int_{\sin x}^{3x} \cosh(\sqrt{t})dt\right)}{dx} =$$

$$\cosh(\sqrt{3x}) \cdot \sinh(\sqrt{3x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x}} \cdot 3 - \cosh(\sqrt{\sin x}) \cdot \sinh(\sqrt{\sin x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x =$$

$$\frac{3}{2\sqrt{3x}} \cdot \cosh(\sqrt{3x}) \cdot \sinh(\sqrt{3x}) - \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cosh(\sqrt{\sin x}) \cdot \sinh(\sqrt{\sin x}).$$

www.michael-buhlmann.de / 01.2021 / Aufgabe 1268