Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Uneigentliches Integral

Aufgabe: Zeige durch vollständige Induktion für jede natürliche Zahl n einschließlich der Null:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!\,.$$

Lösung: I. Uneigentliche Integrale hängen mit „uneigentlichen“, weil unendlichen (unendlich langen, unendlich hohen) Flächen zusammen und ergeben sich, wenn auf einem endlichen Intervall [a; b] eine Funktion f(x) unbeschränkt ist (also eine Polstelle besitzt) oder wenn das Intervall als Integrationsbereich einer (beschränkten) Funktion f(x) unendliche Länge hat, also von der Form [a; ∞) oder (-∞; a] oder (-∞; ∞) ist. In jedem Fall führt man gegen die Unendlichkeitsstelle (hier: $x_0 = a$) oder gegen ±∞ (hier: +∞) einen Grenzprozess durch, d.h. für hier angenommene auf dem Intervall nicht negative Funktionen f(x) ergibt sich – die Existenz endlicher Grenzwerte vorausgesetzt – die (somit endliche) Fläche A als Grenzwert „eigentlicher“ („Näherungs-“) Flächen A(u) und somit als:

$$A(u) = \int_u^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_u^b = F(b) - F(u) \underset{u->a}{->} A = \int_a^b f(x)dx$$

im Fall der Polstelle $x_0 = a$ mit reellem u mit b > u > a bzw.

$$A(u) = \int_a^u f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^u = F(u) - F(a) \underset{u->\infty}{->} A = \int_a^\infty f(x)dx$$

im Fall des unendlich großen Integrationsbereichs mit reellem u mit u > a.
Wichtig ist noch, wenn eine Funktion f(x) für x -> ∞ oder x -> -∞ gegen eine Asymptote y läuft; die unendlich lange Fläche ergibt sich hier als (endliche) Fläche zwischen Funktion und Asymptote.

II. Allgemein gilt für das Beweisverfahren der vollständigen Induktion für Aussagen über die natürlichen Zahlen $n \varepsilon \mathbf{N_0}$ die folgende Vorgehensweise:

1) Induktionsanfang der Gültigkeit der Aussage für ein $n=k_0\, \varepsilon \mathbf{N_0}$ (meist n=0 oder n=1);
2) Induktionsannahme der Gültigkeit der Aussage für n=k;

3) Induktionsbehauptung der Gültigkeit der Aussage für n=k+1;
4) Induktionsschritt von n=k auf n=k+1, d.h.: Beweis der Induktionsbehauptung unter Verwendung der Induktionsannahme;
5) Induktionsende auf Grund von Induktionsanfang und -schritt, d.h. letztlich: Gültigkeit der Aussage für alle natürlichen Zahlen nε$\mathbf{N_0}$.

III. Induktionsbeweis: <u>Behauptung</u>: $\int\limits_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$, nε$\mathbf{N_0}$.

<u>Beweis</u>:

1) *Induktionsanfang*: n=0 mit: $\int\limits_0^\infty e^{-x} dx = 0!$ ist als wahre Aussage erweisbar wegen:

$$A(u) = \int\limits_0^u e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^u = -e^{-u} - (-e^0) = -e^{-u} + e^0 = -e^{-u} + 1 \xrightarrow[u->\infty]{} 1 = \int\limits_0^\infty e^{-x} dx =>$$

$$\int\limits_0^\infty e^{-x} dx = 1 = 0!$$

2) *Induktionsannahme* für n=k: $\int\limits_0^\infty x^k e^{-x} dx = k!$, angenommen als wahre Aussage (*).

3) *Induktionsbehauptung* für n=k+1: $\int\limits_0^\infty x^{k+1} e^{-x} dx = k!$, als wahr zu beweisen.

4) *Induktionsschritt* von n=k auf n=k+1: Wir weisen die Induktionsbehauptung unter Benutzung der Induktionsannahme (*) nach und beweisen damit die Gültigkeit des Induktionsschritts. Es gilt vermöge der Produktintegration mit u(x) = x^{k+1}, u'(x) = $(k+1)x^k$, v'(x) = e^{-x}, v(x) = $-e^{-x}$:

$$A(u) = \int\limits_0^u x^{k+1} e^{-x} dx = \left[x^{k+1}(-e^{-x})\right]_0^u - \int\limits_0^u (k+1)x^k(-e^{-x}) dx = \left[-x^{k+1}e^{-x}\right]_0^u + (k+1)\int\limits_0^u x^k e^{-x} dx =$$

$$-u^{k+1}e^{-u} - (-0^{k+1}e^0) + (k+1)\int\limits_0^u x^k e^{-x} dx = -u^{k+1}e^{-u} + 0 + (k+1)\int\limits_0^u x^k e^{-x} dx =$$

$$-u^{k+1}e^{-u} + (k+1)\int\limits_0^u x^k e^{-x} dx \xrightarrow[u->\infty]{} 0 + (k+1)\int\limits_0^\infty x^k e^{-x} dx =$$

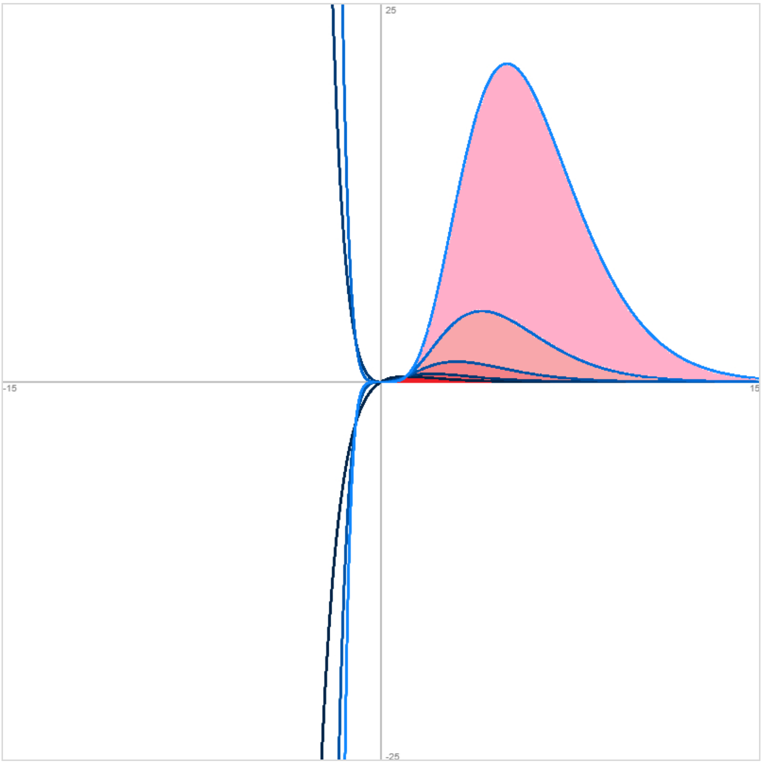
$$(k+1)\int\limits_0^\infty x^k e^{-x} dx \underset{(*)}{=} (k+1)\cdot k! = (k+1)! = \int\limits_0^\infty x^{k+1} e^{-x} dx \Rightarrow \int\limits_0^\infty x^{k+1} e^{-x} dx = (k+1)!$$

u.a. auf Grund der (k+1)-maligen Anwendung der Regel von de l'Hospital beim Grenzwert:

$$\lim_{u->\infty} u^{k+1}e^{-u} = \lim_{u->\infty} \frac{u^{k+1}}{e^u} = \lim_{u->\infty} \frac{(k+1)u^k}{e^u} = \lim_{u->\infty} \frac{(k+1)ku^{k-1}}{e^u} = ... = \lim_{u->\infty} \frac{(k+1)!}{e^u} = 0$$

Damit ist die Induktionsbehauptung nachgewiesen.

5) *Beweisende*: Wegen des Induktionsanfangs gilt auf Grund des Induktionsschritts die zu beweisende Aussage nicht nur für n=0, sondern auch für n=1, weiter für n=2 usw., mithin für alle nε$\mathbf{N_0}$.



www.michael-buhlmann.de / 01.2021 / Aufgabe 1271