**Michael Buhlmann**

# Mathematikaufgaben
## > Analysis
## > Bestimmte Integrale

---

**Aufgabe**: Berechne die bestimmten Integrale:

a) $\int_0^\pi \sin^3 x dx$,

b) $\int_0^\pi \sin^5 x dx$.

**Lösung**: I. Es gilt beim Integrieren eines unbestimmten Integrals die Substitutionsregel:

$$\int f(x)dx = \int f(g(u)) \cdot g'(u)du$$

mit: x = g(u), du = g'(u)du bzw.:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

mit: u = g(x), du = g'(x)dx.

II. Es gilt der binomische Lehrsatz:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = (a+b)^n$$ (a, b reell).

III. Wir führen die Integration mit Hilfe der trigonometrischen Beziehung $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$, einer Substitution sowie des binomischen Lehrsatzes wie folgt durch:

$$\int \sin^{2n+1} x dx = \int \sin x \cdot \sin^{2n} x dx = \int \sin x \cdot \left(\sin^2 x\right)^n dx = \int \sin x \cdot \left(1-\cos^2 x\right)^n dx =$$

$$\int \left(1-\cos^2 x\right)^n \sin x dx \underset{\left\{\substack{u=\cos x \\ du=-\sin x dx}\right\}}{=} -\int \left(1-u^2\right)^n du = -\int \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-u^2)^i \cdot 1^{n-i} du = -\int \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-u^2)^i du =$$

$$-\int \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} u^{2i} du = -\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \frac{u^{2i+1}}{2i+1} \underset{\{\cos x = u\}}{=} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} \frac{\cos^{2i+1} x}{2i+1}.$$

Das unbestimmte Integral lautet damit:

$$\int \sin^{2n+1} x dx = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} \frac{\cos^{2i+1} x}{2i+1} + C$$ mit C als Integrationskonstante.

IV. Für die ersten natürlichen Zahlen einschließlich 0 ergeben sich die nachstehenden Formeln:

| n= | Integral |
|---|---|
| 0 | $\int \sin xdx = -\cos x$ |
| 1 | $\int \sin^3 xdx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x$ |
| 2 | $\int \sin^5 xdx = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x$ |
| 3 | $\int \sin^7 xdx = -\cos x + \cos^3 x - \frac{3}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x$ |
| 4 | $\int \sin^9 xdx = -\sin x + \frac{4}{3}\cos^3 x - \frac{6}{5}\cos^5 x + \frac{4}{7}\cos^7 x - \frac{1}{9}\cos^9 x$ |
| | usw. |

V. Für das bestimmte Integral einer auf einem Intervall [a, b] integrierbaren (z.B. stetigen, differenzierbaren) Funktion f(x) gilt allgemein und unter Verwendung einer Stammfunktion F(x):

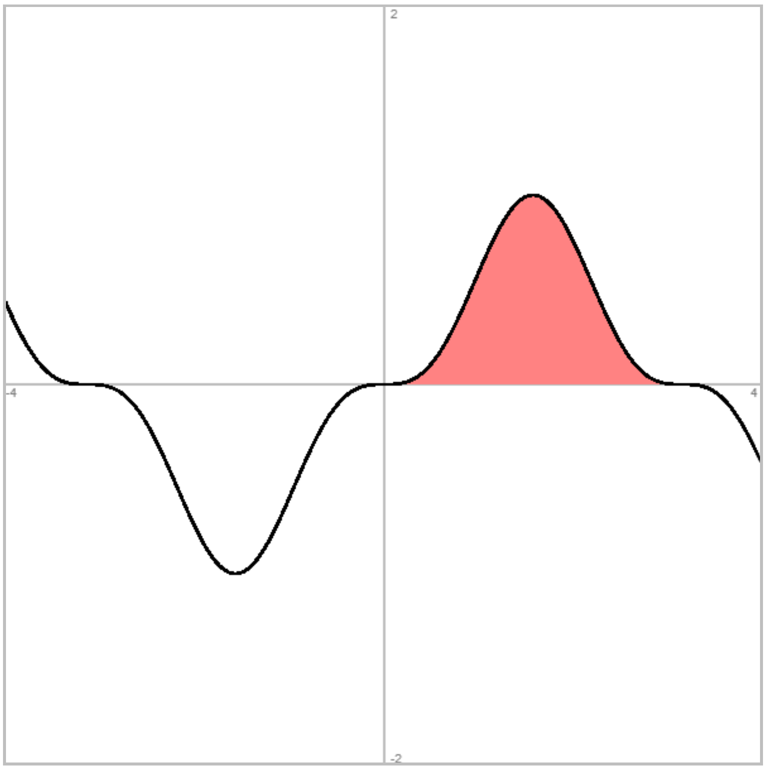
$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

(untere Grenze a, obere Grenze b des Integrationsbereichs, Einsetzen der oberen und unteren Grenze in die Stammfunktion F(x), Differenzbildung).

VI. Die gesuchten bestimmten Integrale ergeben mit Hilfe der tabellierten Stammfunktionen (IV.):

a) $\int_0^\pi \sin^3 xdx = \left[-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^\pi = \left(-\cos\pi + \frac{1}{3}\cos^3\pi\right) - \left(-\cos 0 + \frac{1}{3}\cos^3 0\right) =$

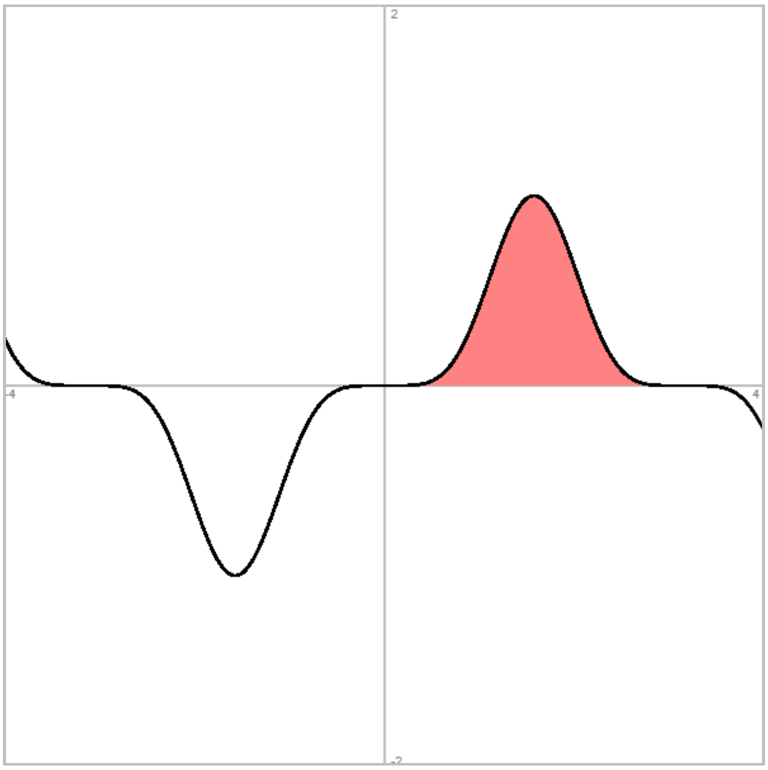
$\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$.



b) $\int_0^{\pi} \sin^5 x dx = \left[ -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x \right]_0^{\pi} =$

$\left( -\cos\pi + \frac{2}{3}\cos^3 \pi - \frac{1}{5}\cos^5 \pi \right) - \left( -\cos 0 + \frac{2}{3}\cos^3 0 - \frac{1}{5}\cos^5 0 \right) = \left( 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) - \left( -1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5} \right) =$

$\frac{8}{15} - \left( -\frac{8}{15} \right) = \frac{16}{15}$.




www.michael-buhlmann.de / 04.2021 / Aufgabe 1367