Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Uneigentliches Integral

Aufgabe: Die Fläche zwischen der Funktion $f(x)=\frac{25}{x\sqrt{x}}$ und der x-Achse ist auf dem Intervall [1; ∞) ist zu bestimmen.

Lösung: I. Uneigentliche Integrale hängen mit „uneigentlichen“, weil unendlichen (unendlich langen, unendlich hohen) Flächen zusammen und ergeben sich, wenn auf einem endlichen Intervall [a; b] eine Funktion f(x) unbeschränkt ist (also eine Polstelle besitzt) oder wenn das Intervall als Integrationsbereich einer (beschränkten) Funktion f(x) unendliche Länge hat, also von der Form [a; ∞) oder (-∞; a] oder (-∞; ∞) ist. In jedem Fall führt man gegen die Unendlichkeitsstelle (hier: x_0 = a) oder gegen ±∞ (hier: +∞) einen Grenzprozess durch, d.h. für hier angenommene auf dem Intervall nicht negative Funktionen f(x) ergibt sich – die Existenz endlicher Grenzwerte vorausgesetzt – die (somit endliche) Fläche A als Grenzwert „eigentlicher“ („Näherungs-“) Flächen A(u) und somit als:

$$A(u)=\int_u^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_u^b=F(b)-F(u)\underset{u->a}{->} A=\int_a^b f(x)dx$$

im Fall der Polstelle x_0 = a mit reellem u mit b > u > a bzw.

$$A(u)=\int_a^u f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^u=F(u)-F(a)\underset{u->\infty}{->} A=\int_a^\infty f(x)dx$$

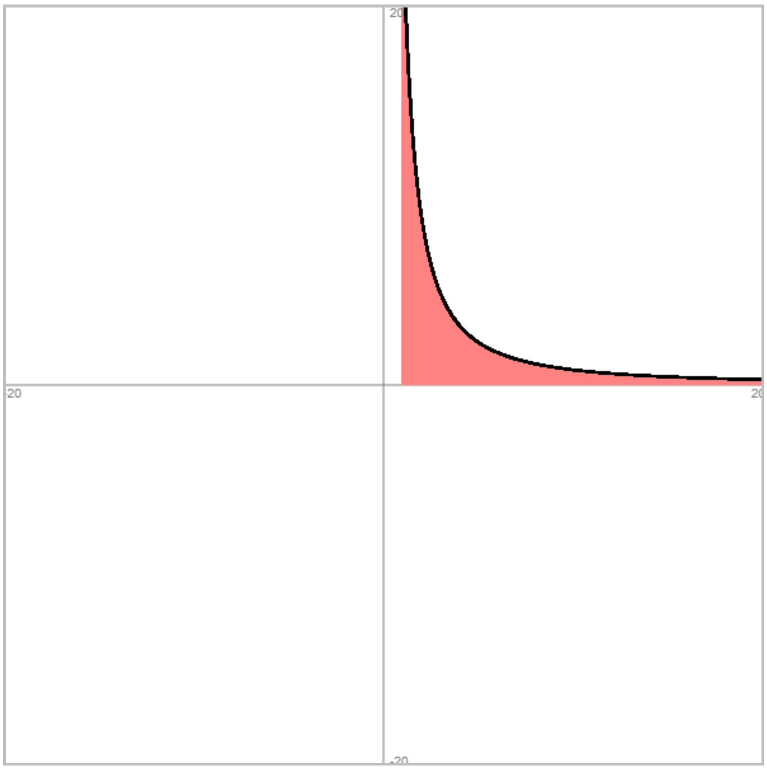
im Fall des unendlich großen Integrationsbereichs mit reellem u mit u > a.
Wichtig ist noch, wenn eine Funktion f(x) für x -> ∞ oder x -> -∞ gegen eine Asymptote y läuft; die unendlich lange Fläche ergibt sich hier als (endliche) Fläche zwischen Funktion und Asymptote.

II. Die (verschobene, gestreckte Hyperbel- bzw. Wurzel-) Funktion $f(x)=\frac{25}{x\sqrt{x}}=\frac{25}{\sqrt{x^3}}=\frac{25}{x^{\frac{3}{2}}}$ ist wegen der senkrechten Asymptote (Polstelle) bei x = 0 und dem positiven Radikanden x>0 auf dem Intervall [1; ∞) definiert und dort integrierbar. Das uneigentliche Integral (1. Art) $\int_1^\infty \frac{25}{x\sqrt{x}}dx$ existiert wegen der folgenden Überlegungen:
Für die Funktion f(x) ist der Grenzprozess nach Einführung von u mit u>0 durchzuführen:

$$A(u)=\int_1^u \frac{25}{x\sqrt{x}}dx=\int_1^u 25x^{-\frac{3}{2}}dx=\left[25\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}\right]_1^u=\left[-\frac{50}{\sqrt{x}}\right]_1^u=-\frac{50}{\sqrt{u}}-\left(-\frac{50}{\sqrt{1}}\right)=50-\frac{50}{\sqrt{u}}\underset{u->\infty}{->}$$

$$50-0=50=A=\int_1^\infty \frac{25}{x\sqrt{x}}dx,$$

so dass sich die unendlich lange, endlich große Fläche A mit Flächeninhalt 50 ergibt.



III. Zur Verdeutlichung des Grenzprozesses betrachten wir beispielhaft für verschiedene u die Teilintegrale bzw. <u>Teilflächen</u> A(u) = $\int_1^u \frac{25}{x\sqrt{x}} dx = \left[-\frac{50}{\sqrt{x}}\right]_1^u$ mit der vorgegebenen Funktion $f(x) = \frac{25}{x\sqrt{x}}$ und ihrer Stammfunktion $F(x) = -\frac{50}{\sqrt{x}}$:

Teilflächen:	
u =	A(u) = $_1\int^u$ f(x) *dx* =
2	A(2) = $_1\int^2$ f(x) *dx* = $[F(x)]_1^2$ = F(2)-F(1) = -35.355339+50 = 14.644661
5	A(5) = $_1\int^5$ f(x) *dx* = $[F(x)]_1^5$ = F(5)-F(1) = -22.36068+50 = 27.63932
10	A(10) = $_1\int^{10}$ f(x) *dx* = $[F(x)]_1^{10}$ = F(10)-F(1) = -15.811388+50 = 34.188612
50	A(50) = $_1\int^{50}$ f(x) *dx* = $[F(x)]_1^{50}$ = F(50)-F(1) = -7.071068+50 = 42.928932
100	A(100) = $_1\int^{100}$ f(x) *dx* = $[F(x)]_1^{100}$ = F(100)-F(1) = -5+50 = 45
500	A(500) = $_1\int^{500}$ f(x) *dx* = $[F(x)]_1^{500}$ = F(500)-F(1) = -2.236068+50 = 47.763932
1000	A(1000) = $_1\int^{1000}$ f(x) *dx* = $[F(x)]_1^{1000}$ = F(1000)-F(1) = -1.581139+50 = 48.418861
5000	A(5000) = $_1\int^{5000}$ f(x) *dx* = $[F(x)]_1^{5000}$ = F(5000)-F(1) = -0.707107+50 = 49.292893
10000	A(10000) = $_1\int^{10000}$ f(x) *dx* = $[F(x)]_1^{10000}$ = F(10000)-F(1) = -0.5+50 = 49.5
100000	A(100000) = $_1\int^{100000}$ f(x) *dx* = $[F(x)]_1^{100000}$ = F(100000)-F(1) = -0.158114+50 = 49.841886
1000000	A(1000000) = $_1\int^{1000000}$ f(x) *dx* = $[F(x)]_1^{1000000}$ = F(1000000)-F(1) = -0.05+50 = 49.95
…	…

www.michael-buhlmann.de / 02.2022 / Aufgabe 1585