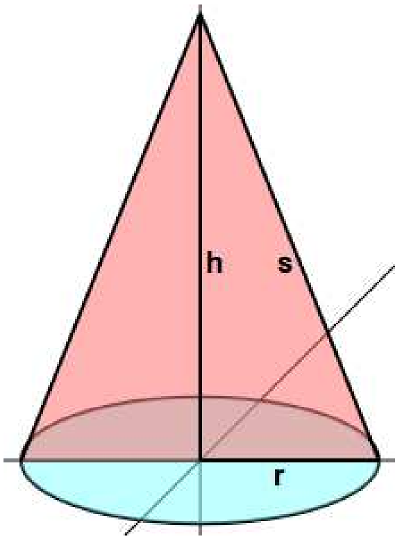
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie
> Kegel

Aufgabe: Bestimme mit den vorgegebenen Inhalten von Grundfläche G = 113,1 cm^2 und Oberfläche O = 417,6 cm^2 den Radius r, den Durchmesser d, den Umfang u, die Mantellinie s, die Höhe h, die Mantelfläche M und das Volumen V des Kegels.



Lösung: I. Ein (gerader) Kegel mit einem Kreis als Grundfläche ist durch den Radius r des Kreises mit Durchmesser d und Kreisumfang u sowie durch die Kegelhöhe h bestimmt, weiter durch die Mantellinie s, durch die Grundfläche G, die Oberfläche O, die Mantelfläche M und das Volumen V. Es gilt:

Kegel

Grundfläche, Radius	$G = \pi r^2$	$r = \sqrt{\frac{G}{\pi}}$	
Durchmesser	$d = 2r$	$r = \frac{d}{2}$	
Kreisumfang	$U = 2\pi r$	$U = \pi d$	$r = \frac{U}{2\pi}$
Mantellinie, Höhe	$s^2 = r^2 + h^2$	$r^2 = s^2 - h^2$	$h^2 = s^2 - r^2$
Mantelfläche	$M = \pi rs$	$r = \frac{M}{\pi s}$	$s = \frac{M}{\pi r}$
Oberfläche	$O = G + M = \pi r^2 + \pi rs = \pi r(r+s)$		
	$G = O - M$	$M = O - G$	
		$r = -\frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} + \frac{O}{\pi}}$	$s = \frac{O}{\pi r} - r$
Volumen	$V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	$r = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$	$h = \frac{3V}{\pi r^2}$

II. Wir folgern aus der Kegelgrundfläche G = 113,1 cm^2 durch Umstellen der Flächenformel für den Kreis, dass für den Kegelradius r

$$G = \pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{G}{\pi}} = \sqrt{\frac{113{,}1}{\pi}} = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}$$

gilt.

III. Wir bestimmen jetzt die Kegelgrößen, die unmittelbar vom Kegelradius r = 5 cm abhängen. Für den Kegeldurchmesser d gilt:

d = 2r = 2·5 = 10 cm,

für den Umfang als Umfang u des Kreises als Grundfläche des Kegels:

u = 2πr = 2π·5 = 10π = 31,42 cm.

IV. Die Summe von Grundflächeninhalt G und Mantelflächeninhalt M ist der Inhalt der Kegeloberfläche O, so dass sich der Mantelflächeninhalt M aus der Differenz von Oberfläche und Grundfläche ergibt:

O = G + M => M = O – G = 417,6 – 113,1 = 304,5 cm^2.

V. Wir berechnen nun aus Radius r = 6 cm und Mantelfläche M = 304,5 cm^2 die Mantellinie s gemäß der Mantelflächenformel:

$$M = \pi r s \Rightarrow s = \frac{M}{\pi r} = \frac{304{,}5}{\pi \cdot 6} = 16{,}15 \text{ cm.}$$

VI. Aus Radius r = 5 cm und Mantellinie s = 16,15 cm folgt gemäß dem Satz des Pythagoras:

$$s^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = s^2 - r^2 = 16{,}15^2 - 6^2 = 225 \Rightarrow h = \sqrt{225} = 15 \text{ cm}$$

als Kegelhöhe h.

VII. Grundfläche G = 113,1 cm^2 und Kegelhöhe h = 15 cm ergeben das Kegelvolumen V:

$$V = \frac{1}{3} G h = \frac{1}{3} \cdot 113{,}1 \cdot 15 = 565{,}44 \text{ cm}^3.$$

Damit ist alles beim Kegel bestimmt.

www.michael-buhlmann.de / 02.2020 / Aufgabe 985