

# Mathematikaufgaben

## > Geometrie

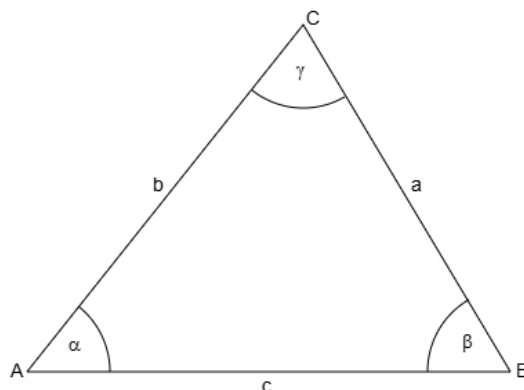
## > Kongruenzsätze

---

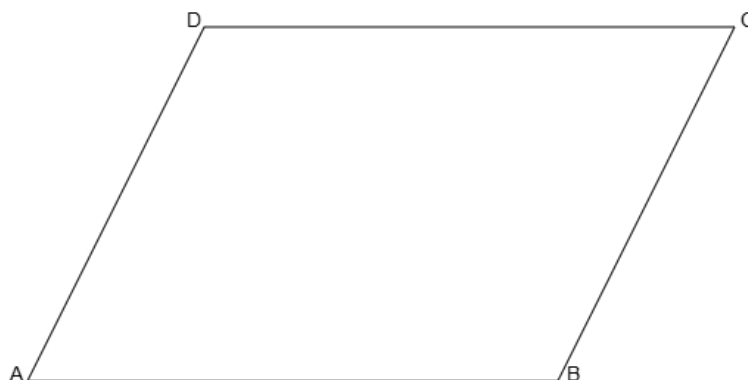
**Aufgabe:** Ein Parallelogramm ist ein Viereck, bei dem die jeweils gegenüberliegenden Seiten parallel zueinander liegen. Zeige mit Hilfe eines Kongruenzsatzes für Dreiecke, dass die jeweils gegenüberliegenden Seiten auch gleich lang sind.

**Lösung:** I. Die Kongruenzsätze sichern die eindeutige Konstruktion eines Dreiecks ABC unter bestimmten geometrischen Voraussetzungen. Dreiecke lassen sich konstruieren

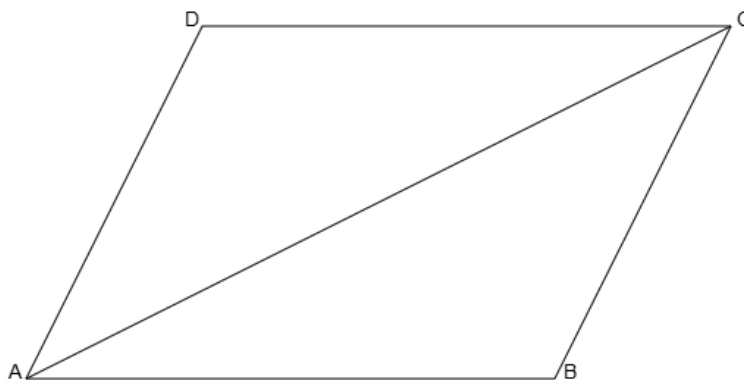
- a) aus drei Seiten (Kongruenzsatz SSS) (wenn die Länge einer Seite die Summe der Längen der zwei anderen Seiten nicht übersteigt)
- b) aus zwei Seiten und einem durch die Seiten eingeschlossenen Winkel (Kongruenzsatz SWS) (bei spitzem, rechten oder stumpfen Winkel)
- c) aus zwei Winkeln und einer durch die Winkel eingeschlossenen Seite (Kongruenzsatz WSW) (wenn der Satz von der Winkelsumme im Dreieck nicht verletzt wird)
- d) aus zwei Seiten und einem Winkel, der nur an einer der vorgegebenen Seite anliegt (Kongruenzsatz SSW) (wobei die Länge der Seite, an der der vorgegebene Winkel nicht anliegt, die Länge der anderen vorgegebenen Seite übersteigt).



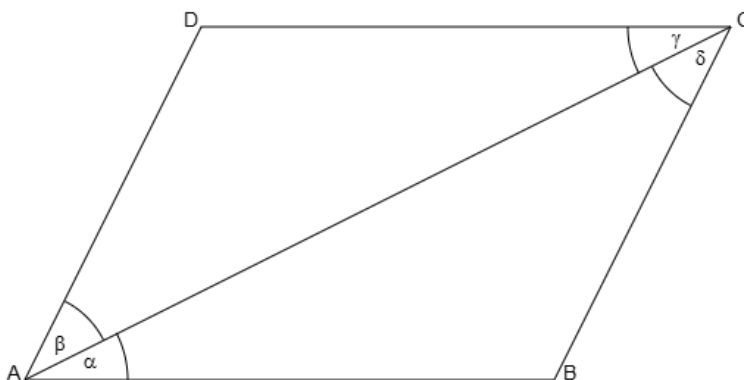
II. Wir gehen von einem Parallelogramm ABCD aus:



und teilen dieses vermöge der Diagonalen durch die Ecken A und C in die zwei Dreiecke ABC und ACD auf:



Weiter ergänzen wir an den Ecken A und C noch die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  wie folgt:



III. Um die Kongruenz der Dreiecke ABC und ACD nachzuweisen, beachten wir zunächst, dass beide Dreiecke die Seite  $\overline{AC}$  gemeinsam haben. Wegen der Parallelität der Parallelogrammseiten  $\overline{AB}$  und  $\overline{CD}$  sind die Winkel  $\alpha$  und  $\gamma$  zueinander Wechselwinkel in den Schnittpunkten A und C der Parallelogrammdiagonalen  $\overline{AC}$  mit den Parallelogrammseiten  $\overline{AB}$  und  $\overline{CD}$ ; die Winkelweiten sind daher gleich:  $\alpha = \gamma$ . Wegen der Parallelität der Parallelogrammseiten  $\overline{AD}$  und  $\overline{BC}$  sind die Winkel  $\beta$  und  $\delta$  zueinander Wechselwinkel in den Schnittpunkten A und C der Parallelogrammdiagonalen  $\overline{AC}$  mit den Parallelogrammseiten  $\overline{AD}$  und  $\overline{BC}$ ; die Winkelweiten sind daher gleich:  $\beta = \delta$ . Die Dreiecke ABC und ACD haben also gemeinsam:

|                   |             |                 |             |
|-------------------|-------------|-----------------|-------------|
| $\triangle ABC$ : | $\alpha$    | $\overline{AC}$ | $\delta$    |
|                   | $\parallel$ | $\parallel$     | $\parallel$ |
| $\triangle ACD$ : | $\gamma$    | $\overline{AC}$ | $\beta$     |

IV. Auf Grund des Kongruenzsatzes WSW ( $\triangle ABC$ :  $\alpha$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\delta$ ;  $\triangle ACD$ :  $\gamma$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\beta$ ) sind die Dreiecke ABC und ACD zueinander kongruent, d.h.: sie stimmen in allen ihren entsprechenden Größen überein. Insbesondere gilt:

$$\overline{AB} = \overline{CD}, \quad \overline{AD} = \overline{BC}.$$

Im Parallelogramm ABCD sind also die jeweils gegenüberliegenden Seiten gleich lang. Q(uod) E(rat) D(emonstrandum) (lateinisch für: was zu beweisen war).