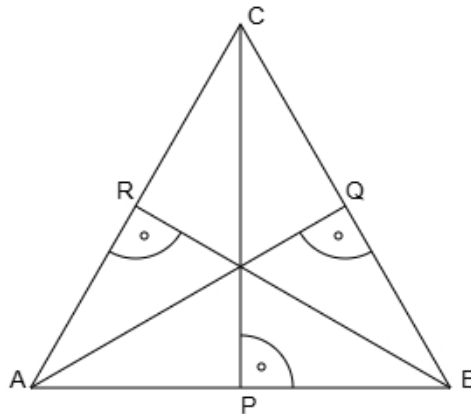


Mathematikaufgaben

> Geometrie

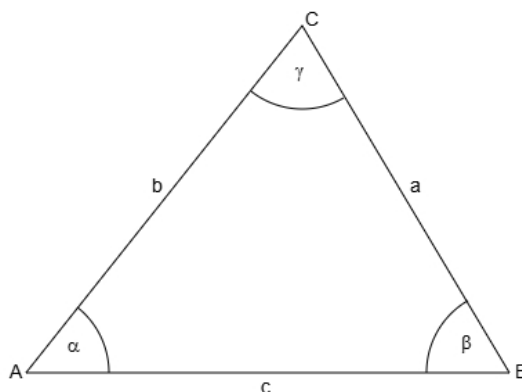
> Kongruenzsätze

Aufgabe: Beweise mit Hilfe eines geeigneten Kongruenzsatzes: Sind in einem Dreieck dessen Höhen gleich lang, so ist das Dreieck gleichseitig. Verwende für den Beweis die nachstehende Abbildung:



Lösung: I. Die Kongruenzsätze sichern die eindeutige Konstruktion eines Dreiecks ABC unter bestimmten geometrischen Voraussetzungen. Dreiecke lassen sich konstruieren

- a) aus drei Seiten (Kongruenzsatz SSS) (wenn die Länge einer Seite die Summe der Längen der zwei anderen Seiten nicht übersteigt)
- b) aus zwei Seiten und einem durch die Seiten eingeschlossenen Winkel (Kongruenzsatz SWS) (bei spitzem, rechten oder stumpfen Winkel)
- c) aus zwei Winkeln und einer durch die Winkel eingeschlossenen Seite (Kongruenzsatz WSW) (wenn der Satz von der Winkelsumme im Dreieck nicht verletzt wird)
- d) aus zwei Seiten und einem Winkel, der nur an einer der vorgegebenen Seite anliegt (Kongruenzsatz SSW) (wobei die Länge der Seite, an der der vorgegebene Winkel nicht anliegt, die Länge der anderen vorgegebenen Seite übersteigt).



II. Wir gehen von oben dargestelltem Dreieck ABC aus und haben als Teildreiecke ABQ und BCP, deren Kongruenz wir nachweisen wollen. Zunächst haben die zwei Dreiecke den rechten Winkel 90° gemeinsam, dann den Winkel β , woraus wegen der Winkelsumme im Dreieck folgt:

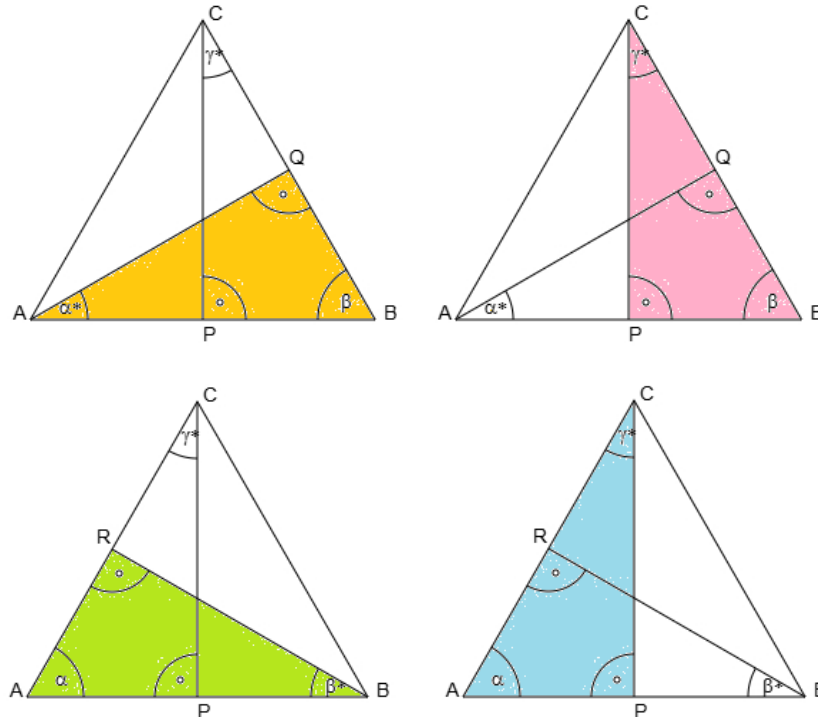
$$\Delta ABQ: \alpha^* + \beta + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha^* = 90^\circ - \beta$$

$$\Delta BCP: \gamma^* + \beta + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \gamma^* = 90^\circ - \beta,$$

woraus die Übereinstimmung der Winkel $\alpha^* = \gamma^*$ folgt. Da zudem die Höhen $h_a = \overline{AQ}$ und $h_c = \overline{CP}$ nach Voraussetzung gleiche Länge haben, gilt also die Übersicht:

$\Delta ABQ:$	α^*	$\overline{AQ}$	90°
	$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$
$\Delta BCP:$	γ^*	$\overline{CP}$	90°

Daraus folgt die Kongruenz der Teildreiecke ABQ und BCP nach dem Kongruenzsatz WSW.



III. Wir betrachten nun die Teildreiecke ABR und CAP. Die zwei Dreiecke besitzen je einen rechten Winkel 90° sowie den Winkel α gemeinsam. Zudem sind die Winkel $\beta^* = 90^\circ - \alpha$ und $\gamma^* = 90^\circ - \alpha$ gleich weit mit $\beta^* = \gamma^*$. Da zudem die Höhen $h_b = \overline{BR}$ und $h_c = \overline{CP}$ nach Voraussetzung gleiche Länge haben, gilt also die Übersicht:

$\Delta ABR:$	β^*	$\overline{BR}$	90°
	$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$
$\Delta CAP:$	γ^*	$\overline{CP}$	90°

Daraus folgt die Kongruenz der Teildreiecke ABR und CAP nach dem Kongruenzsatz WSW.

IV. Auf Grund des Kongruenzsatzes WSW sind die Dreiecke ABQ und BCP sowie die Dreiecke ABR und CAP jeweils zueinander kongruent, d.h.: sie stimmen in allen ihren entsprechenden Größen überein. Insbesondere gilt wegen der Kongruenz zwischen den Dreiecken ABQ und BCP:

$$\overline{AB} = \overline{BC},$$

und wegen der Kongruenz zwischen den Dreiecken ABR und CAP:

$$\overline{AB} = \overline{AC},$$

insgesamt also:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Damit haben alle drei Seiten $c = \overline{AB}$, $b = \overline{AC}$, $a = \overline{BC}$ des Dreiecks ABC dieselbe Länge. Das Dreieck ABC ist gleichseitig. Q(uod) E(rat) D(emonstrandum) (lateinisch für: was zu beweisen war).