Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Algebra/Arithmetik
> Komplexe Zahlen

Aufgabe: Berechne:

$$\frac{62-19i}{1-2i}.$$

Lösung: I. Die Erweiterung der reellen Zahlen **R** mit i = $\sqrt{-1}$ als imaginäre Einheit mit i^2 = -1 führt auf die komplexen Zahlen **C**, die wir als Paar von reellen Zahlen (a, b) = a + ib identifizieren und auf der Gaußschen Zahlenebene als Vektoren darstellen können. Die komplexen Zahlen **C** bilden bzgl. Addition + und Multiplikation · einen Zahlenkörper, d.h. es gelten die vom Reellen her bekannten Gesetzmäßigkeiten vermöge der Grundrechenarten für komplexe Zahlen z = z_1 = a + ib, z_2 = c + id:

$$z_1 + z_2 = (a+c) + i(b+d)$$
$$z_1 - z_2 = (a-c) + i(b-d)$$
$$z_1z_2 = (a+ib)(c+id) = ac + iad + ibc + i^2bd = (ac-bd) + i(ad+bc)$$
$$z_1/z_2 = (a+ib)/(c+id) = (a+ib)(c-id)/[(c+id)(c-id)] = [ac-iad+ibc-i^2bd]/(c^2-i^2d^2) =$$
$$[(ac+bd)+i(bc-ad)]/(c^2+d^2) = (ac+bd)/(c^2+d^2) + i(bc-ad)/(c^2+d^2)$$

Zu z = a + ib gehören: der Realteil Re(z) = a, der Imaginärteil Im(z) = b, die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$ = a – ib; es gilt: $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, wobei der Betrag der komplexen Zahl $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ lautet.

II. Wir rechnen unter Verwendung von i^2 = -1 und auch der 3. binomischen Formel:

$$z = \frac{62-19i}{1-2i} = \frac{(62-19i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{62+124i-19i-18i^2}{1-4i^2} = \frac{62+105i-38\cdot(-1)}{1-4\cdot(-1)} = \frac{62+105i+38}{1+4} =$$
$$\frac{100+105i}{5} = 20+21i.$$

Es folgt noch: Re(z) = 20, Im(z) = 21.

www.michael-buhlmann.de / 01.2021 / Aufgabe 1254