Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Kreuzprodukt

Aufgabe: Beweise: Für den Abstand zwischen einer Geraden g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ mit Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$ und Richtungsvektor $\vec{u}$ (in Parameterform) und einem (nicht auf der Geraden liegenden) Punkt P gilt die Abstandsformel:

$$d(P,g) = \frac{\left|\vec{u} \times \left(\vec{OP} - \vec{a}\right)\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \frac{\left|\vec{u} \times \vec{AP}\right|}{\left|\vec{u}\right|}.$$

Lösung: I. Für die Berechnung des Kreuzprodukts (Vektorprodukt, äußeres Produkt) gilt die Formel:

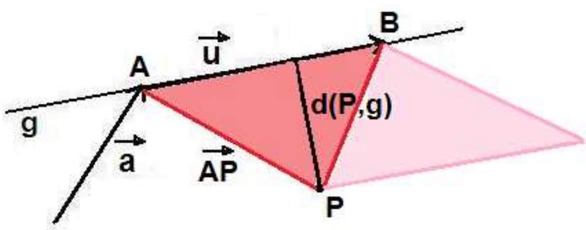
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt für den Betrag des so erhaltenen Kreuzproduktvektors:

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi$$

mit dem Winkel φ als eingeschlossenen Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Der Betrag des Kreuzproduktvektors ist also die Fläche des durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

II. Wir betrachten das Kreuzprodukt des Differenzvektors $\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA} = \vec{OP} - \vec{a}$ von Punkt P und Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$ der Geraden g und des Richtungsvektors der Geraden g, also: $\vec{u} \times \left(\vec{OP} - \vec{a}\right)$. Der Betrag des Kreuzprodukts ist dann: $\left|\vec{u} \times \left(\vec{OP} - \vec{a}\right)\right| = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{OP} - \vec{a}\right| \cdot \sin\varphi$ mit dem Winkel φ zwischen den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{a}$. Der Betrag des Kreuzprodukts entspricht damit der Fläche A_P des durch $\vec{u}$ und $\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{a}$ aufgespannten Parallelogramms.



III. Die Höhe dieses Parallelogramms ist der Abstand des Punktes P von der Geraden g, also: d(P,g). Es folgt mit: $A_P = \left|\vec{u} \times \left(\vec{OP} - \vec{a}\right)\right|$ und $A_P = \left|\vec{u}\right| \cdot d(P,g)$ durch Gleichsetzen und Umformen:

$$\left|\vec{u} \times \left(\vec{OP} - \vec{a}\right)\right| = \left|\vec{u}\right| \cdot d(P,g) \Leftrightarrow$$

$$d(P,g) = \frac{\left|\vec{u} \times \left(\vec{OP} - \vec{a}\right)\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \frac{\left|\vec{u} \times \vec{AP}\right|}{\left|\vec{u}\right|}$$

die allgemeine Formel für die Berechnung des Abstandes zwischen Punkt und Geraden. Was zu beweisen war (*quod erat demonstrandum*).

www.michael-buhlmann.de / 11.2019 / Aufgabe 894