Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Skizziere die gebrochen rationale Funktion $f(x)=\frac{4+2x}{(x-4)(x+5)^2}$ durch Untersuchung der Funktionskurve auf Nullstellen, auf senkrechte Asymptoten und die waagerechte Asymptote.

Lösung: I. Allgemein gilt für die Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer gebrochen rationalen Funktion f(x) die folgende Vorgehensweise:

Zentrale Punkte der Kurvendiskussion
Funktion: $f(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0}=\frac{a_n(x-x_{N1})^{k_1}(x-x_{N2})^{k_2}\cdot...\cdot R_1(x)}{b_m(x-x_{P1})^{kl}(x-x_{P2})^{k_l}\cdot...\cdot R_2(x)}$
I. (Maximaler) Definitionsbereich, senkrechte Asymptoten (Polstellen), Nullstellen: a) Nenner = 0 -> $b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0=0$ -> x_{P1}, x_{P2}, … -> D_f = **R**\\{x_{P1}, x_{P2}, …} (Definitionsbereich) b) Zähler = 0 -> $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0$ -> x_{N1}, x_{N2}, … c) Auswertung: – Stimmt eine Nennernullstelle x_P mit einer Zählernullstelle x_N überein, so kann der Funktionsterm f(x) um den Faktor $(x-x_p)^l = (x-x_N)^k$ (l=k) zu f*(x) gekürzt werden; ist die Vielfachheit der Nennernullstelle echt größer k, so liegt bei x_P eine senkrechte Asymptote vor; ist die Vielfachheit der Nennernullstelle kleiner gleich k, so liegt bei x_P eine Lücke mit Lückenwert f*(x_P) vor. – Ansonsten liegen bei x_{P1}, x_{P2}, … senkrechte Asymptoten mit Linearfaktor $(x-x_p)^l$ vor, und zwar mit Vorzeichenwechsel bei ungeradem l (mit Vorzeichenwechsel bei senkrechter Asymptote x_P mit f(x)->-∞ (x->x_P, x<x_P) und f(x)->∞ (x->x_P, x>x_P) oder mit f(x)->∞ (x->x_P, x<x_P) und f(x)->-∞ (x->x_P, x>x_P)), ohne Vorzeichenwechsel bei geradem l (ohne Vorzeichenwechsel bei senkrechter Asymptote x_P mit f(x)->-∞ (x->x_P, x<x_P) und f(x)->-∞ (x->x_P, x>x_P) oder mit f(x)->∞ (x->x_P, x<x_P) und f(x)->∞ (x->x_P, x>x_P)). – Ansonsten liegen weiter bei x_{N1}, x_{N2}, … Nullstellen mit Linearfaktor $(x-x_p)^k$ vor, und zwar mit Vorzeichenwechsel bei ungeradem k, ohne Vorzeichenwechsel bei geradem k (Hoch-, Tiefpunkt).
II. Waagerechte Asymptote: Für x -> ±∞ gilt: $f(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0} \begin{cases} \to 0 & \text{falls } n<m \\ \to \frac{a_n}{b_m} & \text{falls } n=m \\ \to \pm\infty & \text{falls } n>m \end{cases}$
III. Ableitungen (nach Quotientenregel; zuvor (wenn möglich) Funktionsterm f(x) zu f*(x) kürzen; bei Ableitungen gleiche Faktoren in allen Summanden des Bruchs kürzen; zu beachten sind Vorgehensweisen zum leichteren Ableiten, d.h.: Vermeidung der Quotientenregel bei konstantem Zähler und Anwendung der Kettenregel, Vermeidung der Quotientenregel z.B. bei gebrochen rationalen Funktionen mit Nenner als Potenz x^n und Anwendung der Potenzregel)
IV. Hochpunkte, Tiefpunkte (relative Extrema; Gleichung f'(x) = 0 lösen, Lösungen in f'(x) einsetzen): a) f'(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f'(x_1) < 0 -> H(x_1|f(x_1)) oder f'(x_1) > 0 -> T(x_1|f(x_1)); f'(x_2) < 0 -> H(x_2|f(x_2)) oder f'(x_2) > 0 -> T(x_2|f(x_2)); …
V. Wendepunkte (Gleichung f''(x) = 0 lösen, Lösungen in f'''(x) einsetzen): a) f''(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f'''(x_1) ≠ 0 -> W(x_1|f(x_1)); f'''(x_2) ≠ 0 -> W(x_2|f(x_2)); …
Va. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach IV. und V.) gilt: f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) ≠ 0 -> S(x_0|f(x_0))

Kurvendiskussion gebrochen rationaler Funktionen

Für das Skizzieren einer gebrochen rationalen Funktion genügt es meist, sich auf die Nullstellen, die senkrechten Asymptoten und die waagerechte Asymptote zu beschränken.

II. Nullstellen: Wir setzen den Zähler des Bruchterms der Funktion f(x) gleich 0 und erhalten unter Anwendung des Satzes vom Nullprodukt:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4 + 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = 2$.

Damit haben wir die Nullstelle: N(2|0).

III. Senkrechte Asymptoten/Polstellen: Wir setzen den Nenner des Bruchterms der Funktion f(x) gleich 0 und haben:

$(x–4)(x+5)^2 = 0 \Leftrightarrow x–4 = 0, (x+5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4, x+5 = 0 \Leftrightarrow x = 4, x = -5$.

Wegen des einmaligen Auftretens des Linearfaktors (x–4) im Nenner des Funktionsterms, liegt an der Stelle x=4 eine senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel vor. Der Linearfaktor (x+5) tritt doppelt im Nenner des Funktionsterms auf, so es sich an der Stelle x=-5 um eine senkrechte Asymptote ohne Vorzeichenwechsel handelt. Hinsichtlich des Definitionsbereichs der Funktion sind auszuschließen die x, bei denen der Nenner 0 wird, also: $D_f = \mathbf{R}\backslash\{-5, 4\}$.

IV. Waagerechte Asymptote: Wir betrachten f(x) für betragsmäßig große x, also:

$$x \to \pm\infty \Rightarrow f(x) = \frac{4+2x}{(x-4)(x+5)^2} = \frac{4+2x}{x^3+\ldots} \to 0 = y$$

mit y = 0 als waagerechter Asymptote; die höchste Potenz im Zähler (x) ist nämlich kleiner als die höchste Potenz im Nenner des Funktionsterms (x^3).

V. Wertetabelle, Zeichnung:

x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-5	+∞	±∞	+∞	Senkrechte Asymptote/Pol x = -5
-2	0	-0.04	0.04	Nullstelle N(-2|0)
-0.085	-0.0388	-0.01	0	Wendepunkt W(-0.08|-0.04)
0	-0.04	-0.01	0	Schnittpunkt S_y(0|-0.04)
4	±∞	-∞	±∞	Senkrechte Asymptote/Pol x = 4