Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: a) Führe für die Sinusfunktion $f(x) = \sin(x^2)$ eine Kurvendiskussion durch, wobei die Funktion auf Definitions- und Wertebereich, Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte, Symmetrie und Periodizität zu untersuchen ist.

b) Wie entstehen die Funktionen $g(x) = \sin\left(\frac{x^2}{4}\right)$ und $h(x) = \sin\left(\left(\frac{x-2}{3}\right)^2\right)$ aus der Funktion $f(x) = \sin(x^2)$?

Lösung: a) I. Allgemein ist hinsichtlich einer Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer Funktion f: D_f -> **R** mit y = f(x) zu beachten:

- Definitionsbereich D_f als Menge aller x-Werte, für die der Funktionsterm f(x) gültig ist
- Wertebereich W_f als Menge aller y-Werte, die von der Funktion f(x) angenommen werden
- f(x) = 0 => Nullstellen der Funktion
- f'(x) = 0 => Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion
- f''(x) = 0 => Wendepunkte der Funktion
- f(-x) = f(x) bzw. f(-x) = -f(x) => Symmetrie der Funktion zur y-Achse bzw. zum Ursprung des Koordinatensystems
- f(x+p) = f(x) => Periodizität der Funktion mit Periode p.

Bei Hoch-, Tief-, Sattel- und Wendepunkten sind noch hinreichende Bedingungen der 2. bzw. 3. Ableitung zu untersuchen.

Für die Sinusfunktion $y = \sin(x)$ ergeben sich dann die folgenden Eigenschaften:

- Definitionsbereich D_y = **R**
- Wertebereich W_y = [-1; 1]
- Nullstellen als Wendepunkte: N(kπ|0), kε**Z**
- Hochpunkte: H((4k+1)π/2|1), kε**Z**
- Tiefpunkte: T((4k+3)π/2|-1), kε**Z**
- Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung
- Periode p = 2π.

II. Wir nutzen die Eigenschaften der Sinusfunktion, um zunächst das Folgende bzgl. der vorgegebenen Funktion $f(x) = \sin(x^2)$ festzustellen: f(x) ist auf den ganzen reellen Zahlen definiert, d.h. es gilt für den Definitionsbereich: D_f = **R**; der Wertebereich ist derselbe wie der der Sinusfunktion, also: W_f = [-1; 1].

III. Die Nullstellen der Funktion f(x) ergeben sich mit Hilfe der Substitution z = x^2 aus den folgenden Gleichungsumformungen:

f(x) = 0 ⇔ sin(x^2) = 0 ⇔ sin(z) = 0 ⇔ z = kπ ⇔ x^2 = kπ ⇔ x = $\pm\sqrt{k\pi}$

mit ganzzahligen k≥0. Die Nullstellen lauten damit: N($\pm\sqrt{k\pi}$ |0).

IV. Wir das Nachstehende bilden wir die Ableitungen der Funktion $f(x)=\sin(x^2)$ und erhalten u.a. mit Ketten- und Produktregel die Ableitungsterme:

$f'(x)=2x\cos(x^2)$ (Kettenregel: äußere Ableitung sin -> cos, innere Ableitung x^2 -> 2x)

$f''(x)=2\cos(x^2)-4x^2\sin(x^2)$ (Produktregel: u = 2x -> u' =2, v = cos(x^2) -> v' = -2xcos(x^2))

$f'''(x)=-2x\cos(x^2)-8x\sin(x^2)-8x^3\cos(x^2)$ (Summen-, Produktregel).

V. Für die Hoch- und Tiefpunkte der Funktion $f(x)=\sin(x^2)$ errechnen wir unter Zuhilfenahme des Satzes vom Nullprodukt und der Substitution z = x^2:

f'(x) = 0 ⇔ 2xcos(x^2) = 0 ⇔ 2x = 0, cos(x^2) = 0 ⇔ x = 0, cos(z) = 0 ⇔ x = 0, z = (2k+1)π/2 ⇔ x = 0, x^2 = (2k+1)π/2 ⇔ x = 0, x = $\pm\sqrt{(2k+1)\frac{\pi}{2}}$

mit ganzzahligen k≥0. An der Stelle x = 0 liegt wegen f''(0) = 2 > 0 und f(0) = 0 der Tiefpunkt T(0|0) vor. Hochpunkte haben wir an den Stellen x = $\pm\sqrt{(4k+1)\frac{\pi}{2}}$ vorliegen, Tiefpunkte an den Stellen x = $\pm\sqrt{(4k+3)\frac{\pi}{2}}$, da:

$$f''(\pm\sqrt{(4k+1)\frac{\pi}{2}})=2\cos((4k+1)\frac{\pi}{2})-2(4k+1)\pi\sin((4k+1)\frac{\pi}{2})=-2(4k+1)\pi<0$$

$$f''(\pm\sqrt{(4k+3)\frac{\pi}{2}})=2\cos((4k+3)\frac{\pi}{2})-2(4k+3)\pi\sin((4k+3)\frac{\pi}{2})=2(4k+3)\frac{\pi}{2}>0$$

gilt. Wir haben damit als Extrema: H($\pm\sqrt{(4k+1)\frac{\pi}{2}}$ |1), T($\pm\sqrt{(4k+3)\frac{\pi}{2}}$ |-1).

VI. Für die Wendepunkte der Funktion f(x) ist die 2. Ableitung zu betrachten, also:

f''(x) = 0

$2\cos(x^2)-4x^2\sin(x^2)=0$	| +4x^2sin(x^2)
$2\cos(x^2)=4x^2\sin(x^2)$	| :4x^2
$\frac{2}{4x^2}\cos(x^2)=\sin(x^2)$	| :cos(x^2), (Kürzen)
$\frac{1}{2x^2}=\frac{\sin(x^2)}{\cos(x^2)}$	(Tangens als Quotient von Sinus und Kosinus)
$\frac{1}{2x^2}=\tan(x^2)$ (*)	

Die Gleichung (*) kann nur ungefähr gelöst werden. Dabei ist zu beachten, dass der Term 1/(2x^2) schnell gegen 0 läuft bei x -> ±∞. Insofern kann Gleichung (*) durch die Gleichung:

tan(x^2) ≈ 0 (**)

ersetzt werden. Lösen der Gleichung (**) u.a. mit der Substitution z = x^2 ergibt dann:

tan(x^2) = 0 ⇔ tan(z) = 0 ⇔ z = kπ ⇔ x^2 = kπ ⇔ x = $\pm\sqrt{k\pi}$

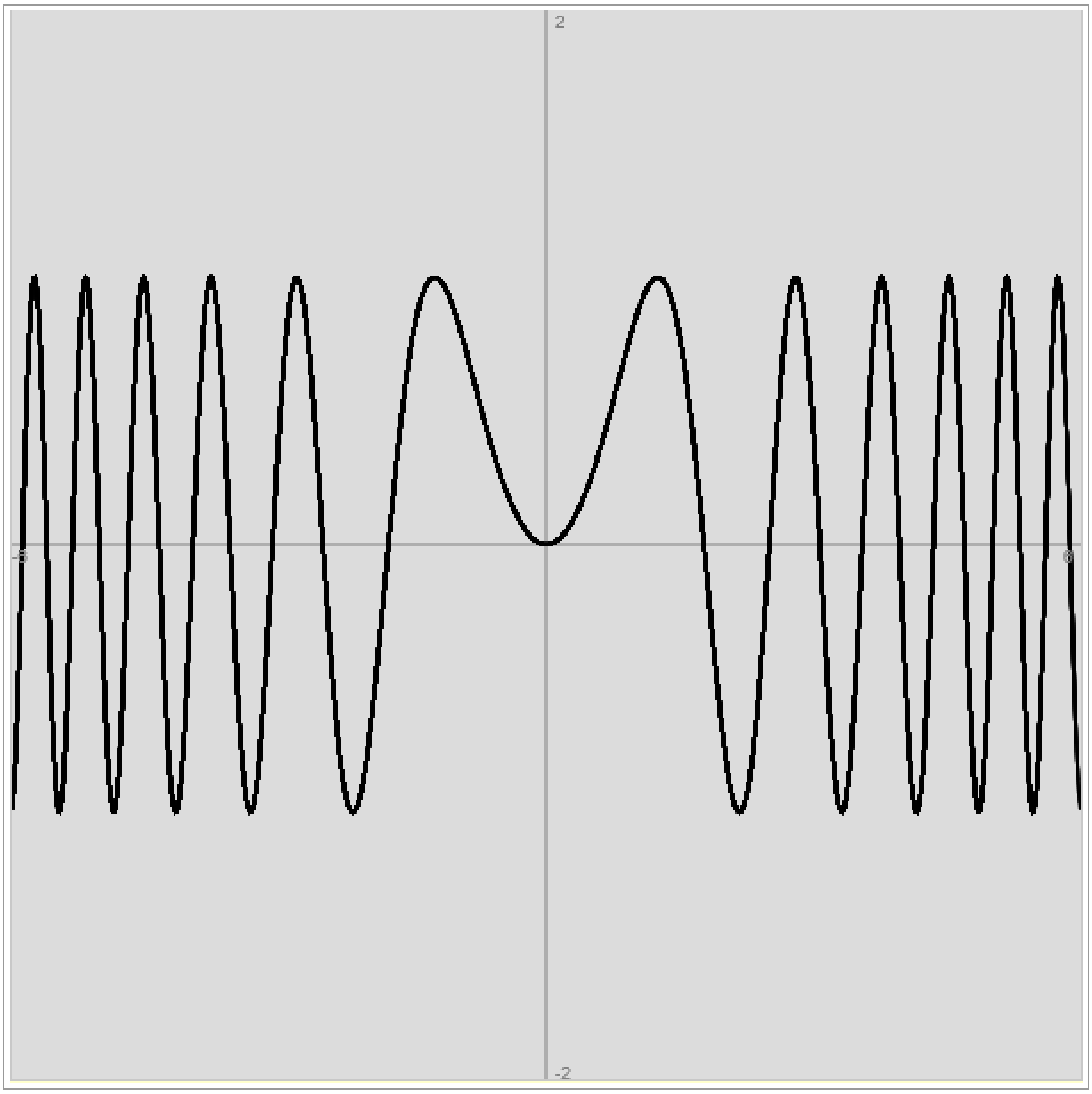
mit ganzzahligen k≥0, k genügend groß. Die Wendepunkte liegen also ungefähr bei den Nullstellen der Funktion, also: W($\pm\sqrt{k\pi}$ |0).

Die Gleichung (*) hat zudem zwei weitere Lösungen, wie der nachstehenden Wertetabelle zu entnehmen ist: die Wendepunkte W(±0,8|0,6).

VII. Wertetabelle, Zeichnung (im Intervall [-6; 6]):

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-5.88	-0.0169	11.73	0.35	Nullstelle N(-5.88|-0.02) = Wendepunkt W(-5.88|-0.02)
-5.75	0.9971	0.87	-131.88	Hochpunkt H(-5.75|1)
-5.61	0.0561	-11.18	-5.08	Nullstelle N(-5.61|0.06) = Wendepunkt W(-5.61|0.06)
-5.47	-0.9971	-0.83	119.37	Tiefpunkt T(-5.47|-1)
-5.32	-0.0281	10.62	1.19	Nullstelle N(-5.32|-0.03) = Wendepunkt W(-5.32|-0.03)
-5.17	0.9997	0.26	-106.84	Hochpunkt H(-5.17|1)
-5.02	0.0676	-10	-4.82	Nullstelle N(-5.02|0.07) = Wendepunkt W(-5.02|0.07)
-4.86	-0.9983	-0.56	94.36	Tiefpunkt T(-4.86|-1)
-4.7	-0.0987	9.34	6.73	Wendepunkt W(-4.7|-0.1)
-4.52	0.9999	0.09	-81.68	Hochpunkt H(-4.52|1)
-4.35	0.0729	-8.67	-3.53	Nullstelle N(-4.35|0.07) = Wendepunkt W(-4.35|0.07)
-4.16	-0.9996	-0.22	69.21	Tiefpunkt T(-4.16|-1)
-3.97	-0.0529	7.92	1.34	Nullstelle N(-3.97|-0.05) = Wendepunkt W(-3.97|-0.05)
-3.76	1	0	-56.52	Hochpunkt H(-3.76|1)
-3.56	0.107	-7.07	-3.44	Wendepunkt W(-3.56|0.11)
-3.32	-0.9996	-0.18	44.11	Tiefpunkt T(-3.32|-1)
-3.08	-0.0616	6.14	0.34	Wendepunkt W(-3.08|-0.06)
-2.81	0.9991	0.24	-31.63	Hochpunkt H(-2.81|1)
-2.53	0.1174	-5.02	-1.02	Wendepunkt W(-2.53|0.12)
-2.51	0.0169	-5.02	1.57	Nullstelle N(-2.51|0.02)
-2.18	-0.9992	-0.17	19.07	Tiefpunkt T(-2.18|-1)
-1.82	-0.17	3.59	0.28	Wendepunkt W(-1.82|-0.17)
-1.78	-0.0268	3.56	-1.66	Nullstelle N(-1.78|-0.03)
-1.26	0.9999	0.04	-6.38	Hochpunkt H(-1.26|1)
-0.81	0.61	-1.28	-0.02	Wendepunkt W(-0.81|0.61)
0	0	0	2	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Tiefpunkt T(0|0)
0.8	0.5972	1.28	0.08	Wendepunkt W(0.8|0.6)
1.25	1	0.02	-6.23	Hochpunkt H(1.25|1)
1.77	0.0087	-3.54	-2.11	Nullstelle N(1.77|0.01)
1.81	-0.1341	-3.59	-0.22	Wendepunkt W(1.81|-0.13)
2.17	-1	-0.01	18.83	Tiefpunkt T(2.17|-1)
2.5	-0.0332	5	2.83	Nullstelle N(2.5|-0.03)
2.52	0.0672	5.03	0.29	Wendepunkt W(2.52|0.07)
2.8	0.9999	0.08	-31.32	Hochpunkt H(2.8|1)
3.06	0.0611	-6.1	-4.28	Nullstelle N(3.06|0.06)
3.31	-0.9992	-0.26	43.7	Tiefpunkt T(3.31|-1)
3.54	-0.0348	7.07	3.74	Nullstelle N(3.54|-0.03)
3.75	0.9972	0.56	-55.92	Hochpunkt H(3.75|1)
3.96	0.0264	-7.91	-3.65	Nullstelle N(3.96|0.03) = Wendepunkt W(3.96|0.03)
4.15	-0.9984	-0.47	68.63	Tiefpunkt T(4.15|-1)
4.34	-0.014	8.67	3.04	Nullstelle N(4.34|-0.01) = Wendepunkt W(4.34|-0.01)
4.51	0.9968	0.72	-80.88	Hochpunkt H(4.51|1)
4.68	0.0886	-9.31	-9.74	Nullstelle N(4.68|0.09)
4.85	-0.9992	-0.38	93.86	Tiefpunkt T(4.85|-1)
5.01	-0.0326	10	5.26	Nullstelle N(5.01|-0.03) = Wendepunkt W(5.01|-0.03)
5.16	0.997	0.8	-105.93	Hochpunkt H(5.16|1)

5.31	0.0782	-10.57	-10.79	Nullstelle N(5.31|0.08) = Wendepunkt W(5.31|0.08)
5.46	-0.9994	-0.36	118.99	Tiefpunkt T(5.46|-1)
5.6	-0.0559	11.16	8.99	Nullstelle N(5.6|-0.06) = Wendepunkt W(5.6|-0.06)
5.74	0.9992	0.45	-131.47	Hochpunkt H(5.74|1)
5.87	0.1004	-11.65	-15.81	Nullstelle N(5.87|0.1) = Wendepunkt W(5.87|0.1)



VIII. Die Funktion $f(x) = \sin(x^2)$ ist <u>achsensymmetrisch</u> wegen:

f(-x) = sin((-x)^2) = sin(x^2) = f(x).

IX. Eine (konstante) <u>Periodizität</u> der Funktion $f(x) = \sin(x^2)$ kann nicht ausgemacht werden, da die innere Funktion y = x^2 nicht linear ist, mithin die Periodizität der trigonometrischen Funktionen nicht greift.

b) I. Allgemein gilt, dass Funktionen f(x) vermöge:

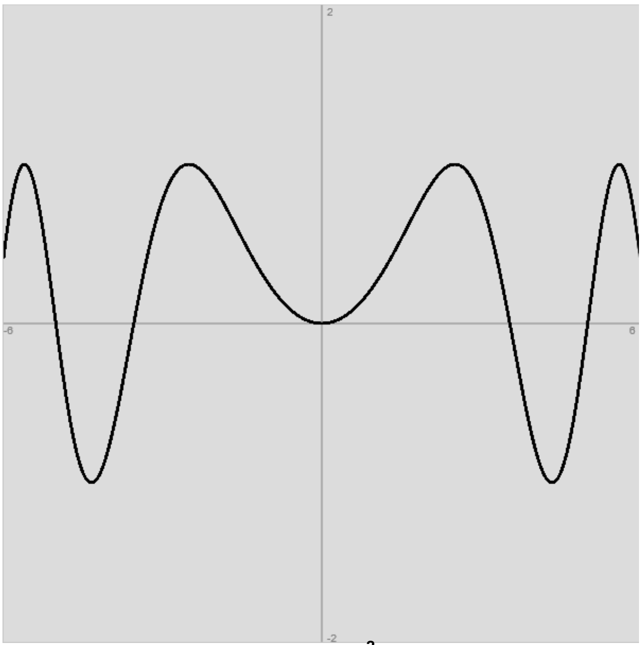
y = f(x–c)

entlang der x-Achse nach rechts (c>0) bzw. links (c<0) verschoben werden können. Mit

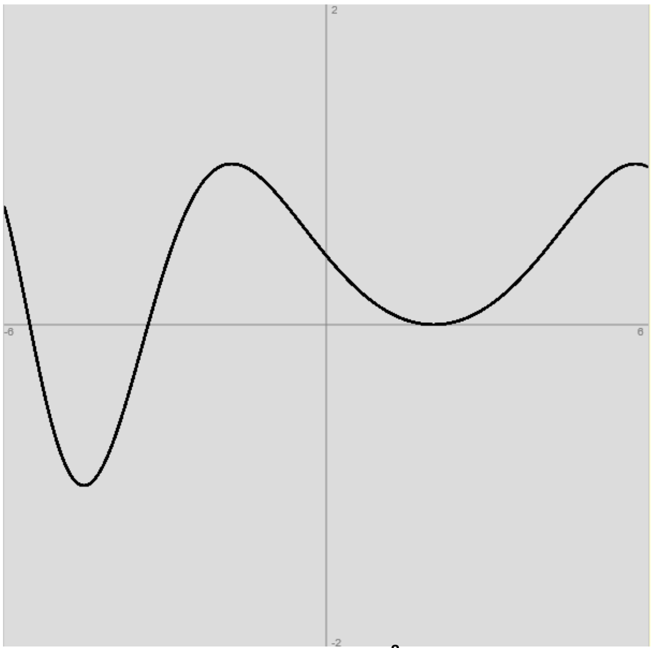
y = f(x/k)

erfolgt für den Faktor k>0 eine Streckung der Funktion f(x) (k>1) bzw. eine Stauchung (k<1) entlang der x-Achse.

II. Die Funktion $g(x) = \sin\left(\frac{x^2}{4}\right) = \sin\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)$ entsteht damit offensichtlich durch Streckung der Funktion $f(x) = \sin(x^2)$ um den Faktor 2 entlang der x-Achse.



g(x) = sin(x²/4)



h(x) = sin((x-2)²/9)

III. Die Funktion $h(x) = \sin\left(\left(\frac{x-2}{3}\right)^2\right)$ entsteht durch Verschiebung der Funktion $f(x) = \sin(x^2)$ um c=2 nach rechts und durch Streckung um den Faktor k=3 entlang der x-Achse.

www.michael-buhlmann.de / 05.2017 / Aufgabe 344