Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Untersuche die Funktion $f(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ auf Definitions- und Wertebereich, Nullstellen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte, Pole, Asymptoten.

Lösung: I. Allgemein ist hinsichtlich einer Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer Funktion f: D_f -> **R** mit y = f(x) zu beachten:

- Definitionsbereich D_f als Menge aller x-Werte, für die der Funktionsterm f(x) gültig ist
- Wertebereich W_f als Menge aller y-Werte, die von der Funktion f(x) angenommen werden
- f(x) = 0 => Nullstellen der Funktion
- f'(x) = 0 => Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion
- f''(x) = 0 => Wendepunkte der Funktion
- x->x_0: f(x)->±∞ => x_0 als Polstelle (senkrechte Asymptote) mit/ohne Vorzeichenwechsel
- f(-x) = f(x) bzw. f(-x) = -f(x) => Symmetrie der Funktion zur y-Achse bzw. zum Ursprung des Koordinatensystems
- x->+∞: f(x)->±∞ oder f(x)->y_0 = y als waagerechte Asymptote bzw.: x->-∞: f(x)->±∞ oder f(x)->y_0 = y als waagerechte Asymptote

Bei Hoch-, Tief-, Sattel- und Wendepunkten sind noch hinreichende Bedingungen der 2. bzw. 3. Ableitung zu untersuchen.

II. Definitionsbereich: Auszuschließen ist zunächst das x, bei dem der Nenner des Bruchs $\frac{x+1}{x-1}$ (als innere Funktion) Null wird, also:

x – 1 = 0 ⇔ x = 1.

Der natürliche Logarithmus ist definiert, wenn sein Argument positiv ist, nun ist der Term $\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ positiv, wenn $\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \neq 0$ gilt, also:

$\frac{x+1}{x-1} \neq 0$ ⇔ x+1 ≠ 0 ⇔ x ≠ -1.

Der Definitionsbereich ist damit: D_f = **R**\{-1, 1}.

III. Ableitungen: Die Funktion $f(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ lässt sich nach den Logarithmengesetzen (hier: ln(u/v) = ln(u)-ln(v)) umschreiben zu:

$f(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = \ln|x+1| - \ln|x-1|$ (Funktion),

so dass für die Ableitungen gemäß der Regel $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ gilt:

$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = (x+1)^{-1} - (x-1)^{-1}$ (1. Ableitung)

$$f''(x) = -(x+1)^{-2} + (x-1)^{-2} = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2}$$ (2. Ableitung)

$$f'''(x) = 2(x+1)^{-3} - 2(x-1)^{-3} = \frac{2}{(x+1)^3} - \frac{2}{(x-1)^3}$$ (3. Ableitung).

IV. Nullstellen: *Notwendige und hinreichende Bedingung*: U.a. durch Exponieren ($e^{()}$) lösen wir auf:

f(x) = 0 ⇔ $\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ =0 ⇔ $\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ = 1 ⇔ $\frac{x+1}{x-1}$ = ±1 ⇔ x+1 = ±(x-1) ⇔ x+1 = -(x-1), x+1 = x-1 ⇔ x+1 = -x+1, x+1 = x-1 ⇔ 2x = 0, 1 = -1 ⇔ x = 0.

Damit haben wir die Nullstelle: N(0|0).

V. Hoch-, Tiefpunkte*: Notwendige Bedingung*:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow x+1 = x-1 \Leftrightarrow 1 = -1$$

Es gibt mithin keine Extremstellen von f(x).

VI. Wendepunkte: *Notwendige Bedingung*:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} \Leftrightarrow (x-1)^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow \pm(x-1) = x+1,$$

was wieder (s. IV.) auf: x = 0 führt. *Hinreichende Bedingung*: Einsetzen von x = 0 in die 3. Ableitung ergibt:

$$f'''(0) = \frac{2}{1^3} - \frac{2}{(-1)^3} = 4 > 0.$$

Bei W(0|0) (x=0 ist ja die Nullstelle der Funktion: f(0)=0) liegt somit der einzige Wendepunkt der Funktion vor.

VI. Senkrechte Asymptoten/Polstellen: Polstellen liegen an den Lücken des Definitionsbereichs x = -1 bzw. x = +1 vor. Dabei gilt:

x=-1: x->-1 => $\frac{x+1}{x-1}$ -> 0 => $f(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ -> -∞.

D.h.: Bei x = -1 liegt eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel vor.

Entsprechend gilt:

x=1: x->1 => $\frac{x+1}{x-1}$ -> ±∞ => $\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ -> +∞ => $f(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ -> +∞.

D.h.: Bei x = 1 liegt eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel vor.

VII. Waagerechte Asymptote: Wir betrachten f(x) für betragsmäßig große x, also:

x->±∞ => $\frac{x+1}{x-1}$ -> 1 => $\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ -> 1 => $f(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ -> ln(1) = 0 = y

mit y = 0 (x-Achse) als waagerechter Asymptote.

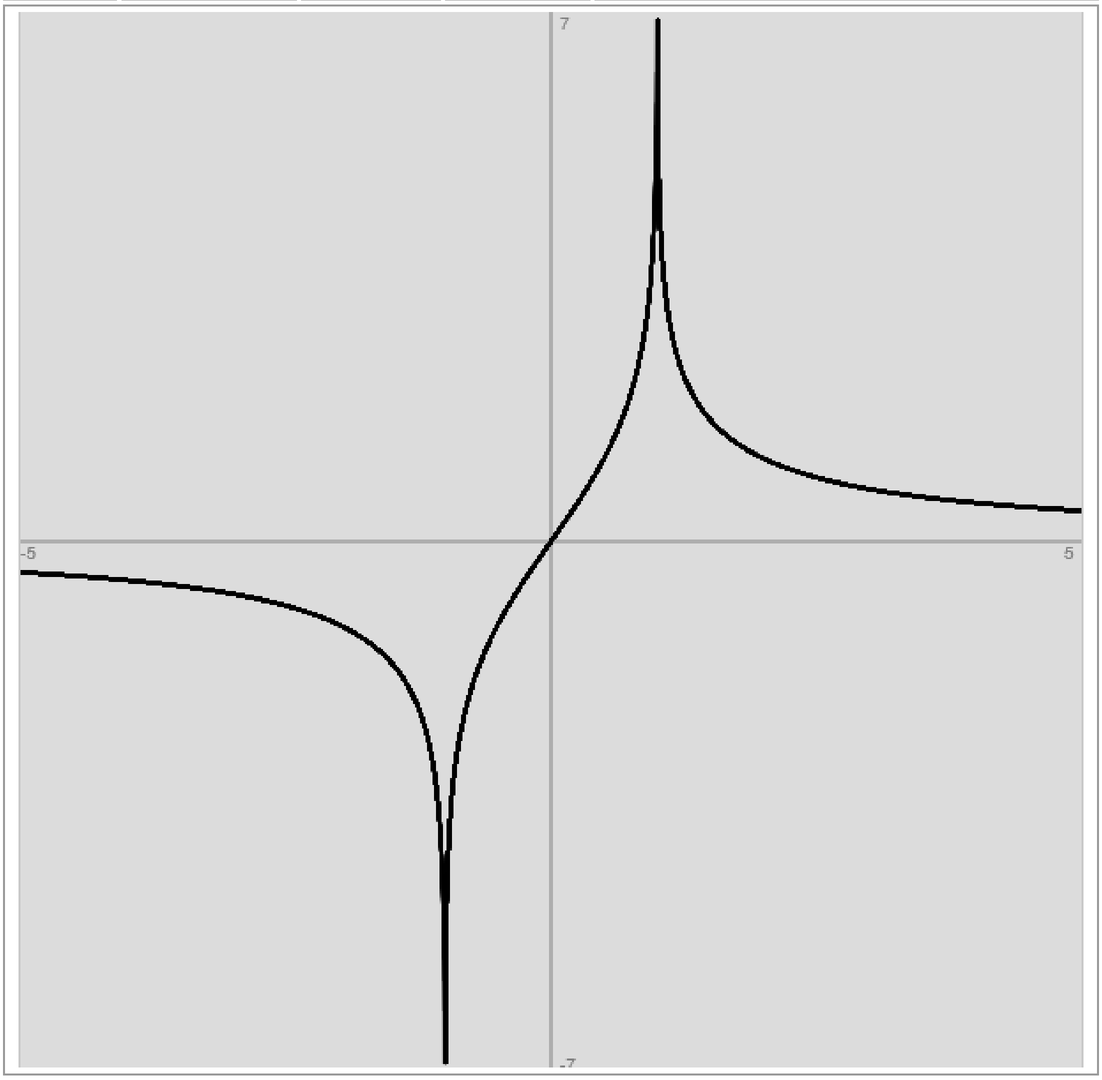
VIII. Für die Funktion f(x) gilt Punktsymmetrie wegen der folgenden auch auf den Logarithmengesetzen (hier: ln(1/u) = -ln(u)) beruhenden Überlegungen:

$$f(-x) = \ln\left|\frac{-x+1}{-x-1}\right| = \ln\left|\frac{-(x-1)}{-(x+1)}\right| = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = -\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = -f(x).$$

IX. Wertebereich: Auf Grund des Verhaltens der Funktion f(x) an den Polstellen (x->1: f(x)->+∞; x->-1: f(x)->-∞) und bzgl. der waagerechten Asymptote (x->+∞: f(x)->0) und unter Berücksichtigung des Wendepunktes W(0|0) umfasst der Wertebereich alle reelle Zahlen: W_f = **R**.

X. Wertetabelle, Zeichnung:

x	**y = f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-1	-Infinity	-	-	Senkrechte Asymptote/Pol x = -1
0	0	2	0	Wendepunkt W(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0)
1	Infinity	-	-	Senkrechte Asymptote/Pol x = 1



www.michael-buhlmann.de / 01.2018 / Aufgabe 546