Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Untersuche die Funktion f(x) = $x \cdot (\ln(x))^2$ auf Definitions- und Wertebereich, Nullstellen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte, Pole, Asymptoten.

Lösung: I. Allgemein ist hinsichtlich einer Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer Funktion f: D_f -> **R** mit y = f(x) zu beachten:

- Definitionsbereich D_f als Menge aller x-Werte, für die der Funktionsterm f(x) gültig ist
- Wertebereich W_f als Menge aller y-Werte, die von der Funktion f(x) angenommen werden
- f(x) = 0 => Nullstellen der Funktion
- f'(x) = 0 => Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion
- f''(x) = 0 => Wendepunkte der Funktion
- x->x_0: f(x)->±∞ => x_0 als Polstelle (senkrechte Asymptote) mit/ohne Vorzeichenwechsel
- x_0 als Randstelle des Definitionsbereichs: x->x_0: f(x)->y_0 => x_0 als Lücke (hebbare Unstetigkeitsstelle)
- f(-x) = f(x) bzw. f(-x) = -f(x) => Symmetrie der Funktion zur y-Achse bzw. zum Ursprung des Koordinatensystems
- x->+∞: f(x)->±∞ oder f(x)->y_0 = y als waagerechte Tangente bzw.: x->-∞: f(x)->±∞ oder f(x)->y_0 = y als waagerechte Asymptote

Bei Hoch-, Tief-, Sattel- und Wendepunkten sind noch hinreichende Bedingungen der 2. bzw. 3. Ableitung zu untersuchen.

II. Undefinierte Ausdrücke vom Typ 0/0 oder ∞/∞ lassen sich im Rahmen der Analysis nach den Regeln von de l'Hospital errechnen vermöge der Identität:

$$\lim_{x->x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x->x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

wobei für zwei differenzierbare Funktionen f(x), g(x) die Bedingung $f(x_0) = g(x_0) = 0$ oder = ±∞ für $x_0 \varepsilon$ **R** oder $x_0 = \pm\infty$ gilt. Die Regeln von de l'Hospital lassen sich auch auf unbestimmte Ausdrücke vom Typ „$0\cdot\infty$", „∞ - ∞", „1^∞", „0^0", „∞^0" anwenden, ebenso bei reellen x_0 auf links- und rechtsseitige Grenzwerte (rechtsseitig: x->x_0^+, linksseitig: x->x_0^-).

III. Definitionsbereich: Der natürliche Logarithmus ist definiert, wenn sein Argument positiv ist, was der Fall für x>0 ist. Der Definitionsbereich ist damit: $D_f = (0;\infty)$.

IV. Ableitungen: Die Funktion f(x) = $x \cdot (\ln(x))^2$ ist nach Produkt- und Kettenregel abzuleiten. Für die Ableitungen gilt auch gemäß der Regel $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$:

f'(x) = $1 \cdot (\ln(x))^2 + x \cdot 2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x}$ = $(\ln(x))^2 + 2 \cdot \ln(x)$ (1. Ableitung)

f''(x) = $2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \cdot \ln(x) + 2}{x}$ (2. Ableitung)

f'''(x) = $2 \cdot \frac{1}{x} \cdot x^{-1} + (2 \cdot \ln(x) + 2) \cdot (-x^{-2}) = \frac{2}{x^2} - \frac{2 \cdot \ln(x) + 2}{x^2} = -\frac{2 \cdot \ln(x)}{x^2}$ (3. Ableitung, auf Grund von: f“(x) = (2·ln(x)+2)·x^{-1}).

V. Nullstellen: *Notwendige und hinreichende Bedingung*: Gemäß dem Satz vom Nullprodukt und durch Exponieren lösen wir auf:

f(x) = 0 ⇔ x·$(\ln(x))^2$ = 0 ⇔ x = 0, $(\ln(x))^2$ = 0 ⇔ x = 0, ln(x) = 0 ⇔ x = 0, x = e^0 = 1.

Damit haben wir die einzige Nullstelle: N(1|0), denn die Gleichungslösung x = 0 liegt nicht im Definitionsbereich D_f.

VI. Hoch-, Tiefpunkte*: Notwendige Bedingung*: Wir lösen durch Ausklammern, mit dem Satz vom Nullprodukt und durch Exponieren die Gleichung auf, die sich aus dem Nullsetzen der 1. Ableitung ergibt:

f‘(x) = 0 ⇔ $(\ln(x))^2$+2·ln(x) = 0 ⇔ ln(x)·(ln(x)+2) = 0 ⇔ ln(x) = 0, ln(x)+2 = 0 ⇔ ln(x) = 0, ln(x) = -2 ⇔ x = e^0 = 1, x = e^{-2} = 1/e^2.

Hinreichende Bedingung: Es gilt:

f“(1) = $\dfrac{2\cdot\ln(1)+2}{1}$ = 2 > 0 (Tiefpunkt bei x = 1)

f“(e^{-2}) = $\dfrac{2\cdot\ln(e^{-2})+2}{e^{-2}} = \dfrac{-4+2}{e^{-2}} = -2e^2$ < 0 (Hochpunkt bei x = 1/e^2).

Es liegt wegen f(1) = 0 (s. V.) und mit f(e^{-2}) = e^{-2}·$(\ln(e^{-2}))^2$ = e^{-2}·$(-2)^2$ = 4e^{-2} ein Tiefpunkt T(1|0) und ein Hochpunkt H(e^{-2}|4 e^{-2}) = H(1/e^2|4/e^2) vor.

VII. Wendepunkte: *Notwendige Bedingung*: Nullsetzen der 2. Ableitung ergibt:

f“(x) = 0 ⇔ $\dfrac{2\cdot\ln(x)+2}{x}$ = 0 ⇔ 2·ln(x) +2 = 0 ⇔ ln(x) + 1 = 0 ⇔ ln(x) = -1 ⇔ x = e^{-1} = 1/e.

Hinreichende Bedingung: Einsetzen von x = e^{-1} in die 3. Ableitung ergibt:

f‘“(e^{-1}) = $-\dfrac{2\cdot\ln(e^{-1})}{e^{-2}} = -\dfrac{-2}{e^{-2}} = 2e^2$ ≠ 0.

Mit: f(e^{-1}) = e^{-1}·$(\ln(e^{-1}))^2$ = e^{-1}·$(-1)^2$ = e^{-1} liegt somit der einzige Wendepunkt W(e^{-1}|e^{-1}) = W(1/e|1/e) der Funktion vor.

VIII. An der Randstelle x = 0 des Definitionsbereichs befindet sich eine hebbare Unstetigkeitsstelle oder Lücke vom Typ 0·∞. Die Regeln von de l’Hospital versorgen uns mit Lückenwert, wenn wir die Funktion umschreiben als:

f(x) = x·$(\ln(x))^2$ = $\dfrac{(\ln(x))^2}{\frac{1}{x}}$,

so dass ein Bruch vom Typ ∞/∞ entsteht und die Ableitungsregeln nach de l’Hospital greifen. Somit gilt bzgl. des rechtsseitigen Grenzwerts (x>0):

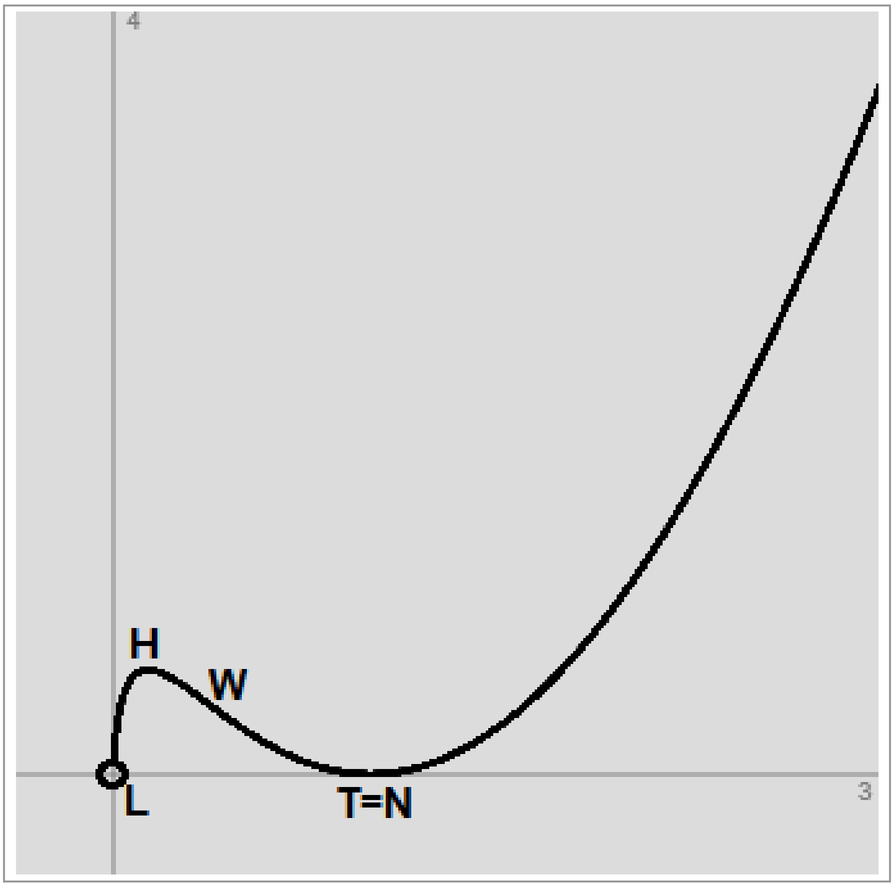
$$\lim_{x->0^+} f(x) = \lim_{x->0^+}\frac{(\ln(x))^2}{\frac{1}{x}} \overset{l'Hospital}{=} \lim_{x->0^+}\frac{2\cdot\ln(x)\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x->0^+}\frac{2\cdot\ln(x)}{-\frac{1}{x}} \overset{l'Hospital}{=} \lim_{x->0^+}\frac{2\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x->0^+}\left(2\cdot\frac{1}{x}\cdot x^2\right) =$$
$$\lim_{x->0^+}(2\cdot x) = 2\cdot 0 = 0$$

und daher die Existenz einer hebbaren Unstetigkeitsstelle L mit Lückenwert y = 0, also: L(0|0).

IX. Wertebereich: Auf Grund des Definitionsbereichs D_f = (0; ∞) ist der erste Faktor x der Funktion f(x) = x·$(\ln(x))^2$ immer positiv, der zweite Faktor $(\ln(x))^2$ nichtnegativ, so dass die Funktion nur nichtnegative y-Werte annimmt. Der Wertebereich von f(x) ist somit: W_f = [0; ∞).

X. Wertetabelle, Zeichnung:

x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	[0]	-	-	Lücke L(0|0) [= Schnittpunkt S_y(0|0)]
0.135	0.5413	0.01	-14.85	Hochpunkt H(0.14|0.54)
0.367	0.3688	-1	-0.01	Wendepunkt W(0.37|0.37)
1	0	0	2	Tiefpunkt T(1|0)



www.michael-buhlmann.de / 01.2018 / Aufgabe 547