Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Gegeben ist die gebrochen rationale Funktion $f(x) = \frac{x^2+4}{2x}$. Charakterisiere den Funktionsverlauf u.a. durch Untersuchung auf Extrempunkte, senkrechte und schiefe Asymptoten.

Lösung: I. Allgemein gilt für die Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer gebrochen rationalen Funktion f(x) die folgende <u>Vorgehensweise</u>:

Zentrale Punkte der Kurvendiskussion
Funktion: $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0} = \frac{a_n (x-x_{N1})^{k_1}(x-x_{N2})^{k_2} \cdot ... \cdot R_1(x)}{b_m (x-x_{P1})^{kl}(x-x_{P2})^{k_l} \cdot ... \cdot R_2(x)}$
I. (Maximaler) Definitionsbereich, senkrechte Asymptoten (Polstellen), Nullstellen: a) Nenner = 0 -> $b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0 = 0$ -> x_{P1}, x_{P2}, … -> D_f = **R**\\{x_{P1}, x_{P2}, …} (Definitionsbereich) b) Zähler = 0 -> $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ -> x_{N1}, x_{N2}, … c) Auswertung: – Stimmt eine Nennernullstelle x_P mit einer Zählernullstelle x_N überein, so kann der Funktionsterm f(x) um den Faktor $(x-x_p)^l = (x-x_N)^k$ (l=k) zu f*(x) gekürzt werden; ist die Vielfachheit der Nennernullstelle echt größer k, so liegt bei x_P eine senkrechte Asymptote vor; ist die Vielfachheit der Nennernullstelle kleiner gleich k, so liegt bei x_P eine Lücke mit Lückenwert f*(x_P) vor. – Ansonsten liegen bei x_{P1}, x_{P2}, … senkrechte Asymptoten mit Linearfaktor $(x-x_p)^l$ vor, und zwar mit Vorzeichenwechsel bei ungeradem l (mit Vorzeichenwechsel bei senkrechter Asymptote x_P mit f(x)->-∞ (x->x_P, x<x_P) und f(x)->∞ (x->x_P, x>x_P) oder mit f(x)->∞ (x->x_P, x<x_P) und f(x)->-∞ (x->x_P, x>x_P)), ohne Vorzeichenwechsel bei geradem l (ohne Vorzeichenwechsel bei senkrechter Asymptote x_P mit f(x)->-∞ (x->x_P, x<x_P) und f(x)->-∞ (x->x_P, x>x_P) oder mit f(x)->∞ (x->x_P, x<x_P) und f(x)->∞ (x->x_P, x>x_P)). – Ansonsten liegen weiter bei x_{N1}, x_{N2}, … Nullstellen mit Linearfaktor $(x-x_p)^k$ vor, und zwar mit Vorzeichenwechsel bei ungeradem k, ohne Vorzeichenwechsel bei geradem k (Hoch-, Tiefpunkt).
II. Waagerechte Asymptote: Für x -> ±∞ gilt: $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0} \begin{cases} \to 0 & \text{falls } n < m \\ \to \frac{a_n}{b_m} & \text{falls } n = m \\ \to \pm\infty & \text{falls } n > m \end{cases}$ Im Fall n>m ergibt sich (eventuell nach Polynomdivision) eine Grenzkurve y = $\frac{a_n}{b_m}x^{n-m} + ...$; die Näherungskurve ist eine schiefe Asymptote (Gerade) y = mx+c, wenn n=m+1 gilt.
III. Ableitungen (nach Quotientenregel; zuvor (wenn möglich) Funktionsterm f(x) zu f*(x) kürzen; bei Ableitungen gleiche Faktoren in allen Summanden des Bruchs kürzen; zu beachten sind Vorgehensweisen zum leichteren Ableiten, d.h.: Vermeidung der Quotientenregel bei konstantem Zähler und Anwendung der Kettenregel, Vermeidung der Quotientenregel z.B. bei gebrochen rationalen Funktionen mit Nenner als Potenz x^n und Anwendung der Potenzregel)
IV. Hochpunkte, Tiefpunkte (relative Extrema; Gleichung f'(x) = 0 lösen, Lösungen in f'(x) einsetzen): a) f'(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f'(x_1) < 0 -> H(x_1|f(x_1)) oder f'(x_1) > 0 -> T(x_1|f(x_1)); f'(x_2) < 0 -> H(x_2|f(x_2)) oder f'(x_2) > 0 -> T(x_2|f(x_2)); …
V. Wendepunkte (Gleichung f''(x) = 0 lösen, Lösungen in f'''(x) einsetzen): a) f''(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f'''(x_1) ≠ 0 -> W(x_1|f(x_1)); f'''(x_2) ≠ 0 -> W(x_2|f(x_2)); …
Va. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach IV. und V.) gilt: f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) ≠ 0 -> S(x_0|f(x_0))

Kurvendiskussion gebrochen rationaler Funktionen

Zusätzliche Punkte der Kurvendiskussion

VI. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach I., IV.]; bei Hoch- und Tiefpunkten sowie senkrechten Asymptoten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall):

– Monotonieintervall $(-\infty, x_1)$: f(x) monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, x_1 als Polstelle mit $f(x) \to \infty$ ($x \to x_1$, $x<x_1$), $f'(x_0)>0$) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, x_1 als Polstelle mit $f(x) \to -\infty$ ($x \to x_1$, $x>x_1$), $f'(x_0)<0$);
– Monotonieintervall (x_1, x_2): f(x) monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, x_1 als Polstelle mit $f(x) \to \infty$ ($x \to x_1$, $x>x_1$), x_2 als Polstelle mit $f(x) \to \infty$ ($x \to x_2$, $x<x_2$), $f'(x_0)<0$ oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, x_2 als Polstelle mit $f(x) \to -\infty$ ($x \to x_2$, $x<x_2$), $f'(x_0)>0$); …
– Monotonieintervall (x_n, ∞): f(x) monoton fallend (x_n als Hochpunkt, x_n als Polstelle mit $f(x) \to \infty$ ($x \to x_n$, $x>x_n$), $f'(x_0)<0$ oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, x_n als Polstelle mit $f(x) \to -\infty$ ($x \to x_n$, $x>x_n$), $f'(x_0)>0$)

VII. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach I., V.]; bei Wendepunkten sowie senkrechten Asymptoten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall):

– Krümmungsintervall $(-\infty, x_1)$: f(x) links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, x_1 als Polstelle mit $f(x) \to \infty$ ($x \to x_1$, $x<x_1$), $f''(x_0)>0$) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, x_1 als Polstelle mit $f(x) \to -\infty$ ($x \to x_1$, $x<x_1$), $f''(x_0)>0$);
– Krümmungsintervall (x_1, x_2): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, x_1 als Polstelle mit $f(x) \to -\infty$ ($x \to x_1$, $x>x_1$), x_2 als Polstelle mit $f(x) \to -\infty$ ($x \to x_2$, $x<x_2$), $f'(x_0)<0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, x_1 als Polstelle mit $f(x) \to \infty$ ($x \to x_1$, $x>x_1$), x_2 als Polstelle mit $f(x) \to \infty$ ($x \to x_2$, $x<x_2$), $f'(x_0)>0$); …
– Krümmungsintervall (x_n, ∞): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, x_n als Polstelle mit $f(x) \to -\infty$ ($x \to x_n$, $x>x_n$), $f'(x_0)<0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, x_n als Polstelle mit $f(x) \to \infty$ ($x \to x_n$, $x>x_n$), $f'(x_0)>0$); …

VIII. Symmetrie:
a) Achsensymmetrie (zur y-Achse; für gerade Funktionen): f(-x) = f(x) oder:

Zähler gerade, Nenner gerade -> f(x) gerade
Zähler ungerade, Nenner ungerade -> f(x) gerade

b) Punktsymmetrie (zum Ursprung; für ungerade Funktionen): f(-x) = -f(x) oder:

Zähler gerade, Nenner ungerade -> f(x) ungerade
Zähler ungerade, Nenner gerade -> f(x) ungerade

c) f(x) achsensymmetrisch -> f'(x) punktsymmetrisch -> f''(x) achsensymmetrisch usw.
f(x) punktsymmetrisch -> f'(x) achsensymmetrisch -> f''(x) punktsymmetrisch usw.

Kurvendiskussion gebrochen rationaler Funktionen

II. Umformen der Funktionsvorschrift: Die gebrochen rationale Funktion f(x) kann wie folgt umgeformt werden:

$$f(x) = \frac{x^2+4}{2x} = \frac{x^2}{2x} + \frac{4}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} = \frac{1}{2}x + \frac{2}{x}.$$

Wir werden im Folgenden die beiden Darstellungen des Funktionsterms $f(x) = \frac{x^2+4}{2x}$ bzw. $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{2}{x}$ benutzen.

III. Nullstellen: Wir setzen den Zähler der Funktion $f(x) = \frac{x^2+4}{2x}$ gleich 0 und erhalten sofort:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+4}{2x} = 0 \Leftrightarrow x^2+4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4$

und somit keine Nullstellen der Funktion.

IV. Senkrechte Asymptoten/Polstellen: Wir setzen den Nenner der Funktion $f(x) = \frac{x^2+4}{2x}$ gleich 0 und haben:

$2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Wegen der Vielfachheit 1 des Linearfaktors x im Nenner des Funktionsterms liegt an der Stelle x=0 eine senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel vor. Hinsichtlich des Definitionsbereichs der Funktion f(x) gilt dann noch: $D_f = \mathbf{R}\setminus\{0\}$.

V. Schiefe Asymptote: Wir betrachten f(x) für betragsmäßig große x, also:

x->±∞ => $f(x)=\frac{x^2+4}{2x}\to\pm\infty$,

da der Grad des Zählerpolynoms um 1 größer ist als der des Nennerpolynoms. Die schiefe Asymptote y, die sich folglich ergibt gemäß der Darstellung der Funktion als $f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{2}{x}$, ist die Ursprungsgerade:

$y=\frac{1}{2}x$.

VI. Für die Ableitungen benutzen wir den Funktionsterm $f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{2}{x}$ und erhalten:

Funktion: $f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{2}{x}=\frac{1}{2}x+2x^{-1}$

1. Ableitung: $f'(x)=\frac{1}{2}-2x^{-2}=\frac{1}{2}-\frac{2}{x^2}$

2. Ableitung: $f''(x)=4x^{-3}=\frac{4}{x^3}$

3. Ableitung: $f'''(x)=-12x^{-4}=-\frac{12}{x^4}$.

VII. Hoch-, Tiefpunkte: Nullsetzen der 1. Ableitung führt auf:

$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}-\frac{2}{x^2}=0\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm 2$.

An der Stelle x=-2 beträgt der Wert der 2. Ableitung:

$f''(-2)=\frac{4}{(-2)^3}=-\frac{1}{2}$ < 0,

so dass wegen f(-2) = -1–1 = -2 ein Hochpunkt H(-2|-2) vorliegt. An der Stelle x=2 gilt:

$f''(2)=\frac{4}{2^3}=\frac{1}{2}$ > 0

mit f(2) = 1+1 = 2 und dem Tiefpunkt T(2|2).

VIII. Wendepunkte existieren nicht wegen:

$f''(x)=\frac{4}{x^3}\neq 0$

für alle xεD_f = **R**\{0}.

IX. Wegen der senkrechten Asymptote bzw. Polstelle bei x=0 ergeben sich auf der Grundlage der Extrempunkte von f(x) die Monotonieintervalle mit der Monotonie:

(-∞; -2): f(x) ist monoton steigend (Hochpunkt H(-2|-2))
(-2; 0): f(x) ist monoton fallend (Hochpunkt H(-2|-2), Polstelle mit Vorzeichenwechsel bei x=0)
(0; 2): f(x) ist monoton fallend (Polstelle mit Vorzeichenwechsel bei x=0, Tiefpunkt T(2|2))
(2; ∞): f(x) ist monoton steigend (Tiefpunkt T(2|2)).

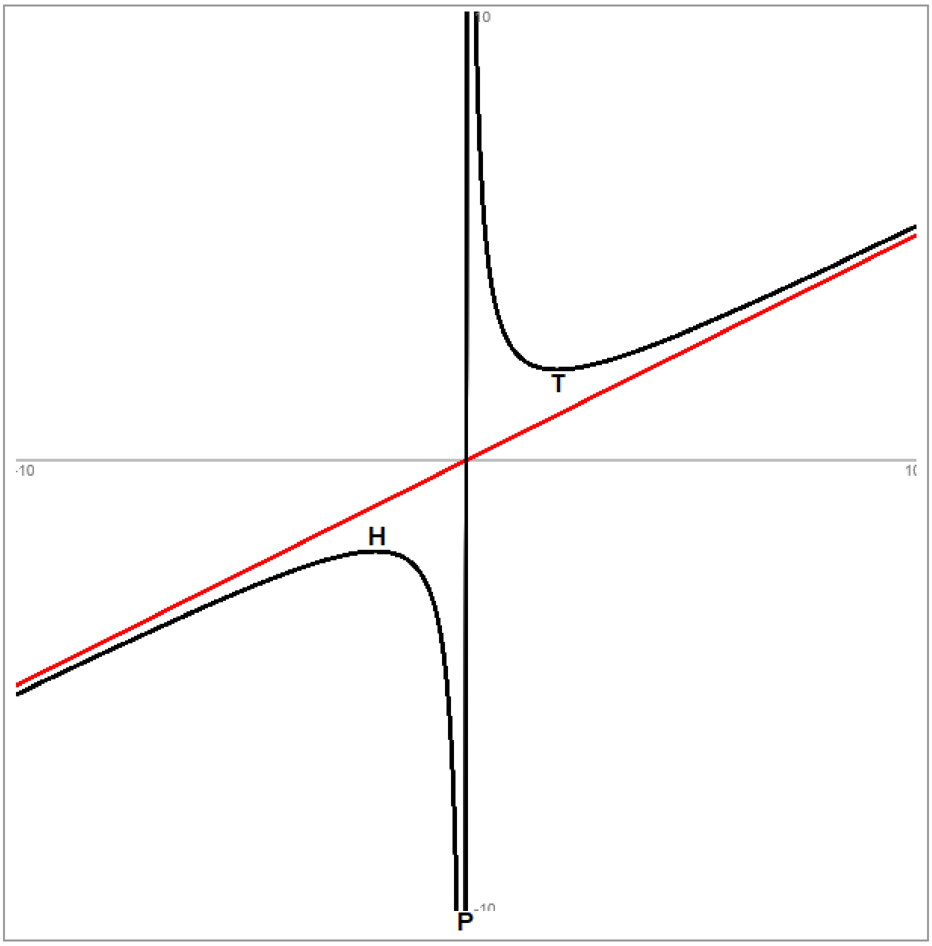
X. Wegen der senkrechten Asymptote bzw. Polstelle bei x=0 liegen folgende Krümmungsintervalle und Krümmungseigenschaften von f(x) vor:

(-∞; 0): f(x) ist rechts gekrümmt (Hochpunkt H(-2|-2), Polstelle mit Vorzeichenwechsel bei x=0)
(0; ∞): f(x) ist links gekrümmt (Polstelle mit Vorzeichenwechsel bei x=0, Tiefpunkt T(2|2)).

XI. Die Funktion $f(x)=\frac{x^2+4}{2x}$ besitzt zudem Punktsymmetrie zum Ursprung O(0|0) des Koordinatensystems, da der Zähler y = x^2+4 eine zur y-Achse achsensymmetrische, der Nenner y = 2x eine zum Koordinatenursprung punktsymmetrische Teilfunktion darstellt.

XII. Wertetabelle, Zeichnung:

x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-2	-2	0	-0.5	Hochpunkt H(-2|-2)
0	±∞	-∞	±∞	Senkrechte Asymptote/Pol x = 0
2	2	0	0.5	Tiefpunkt T(2|2)



www.michael-buhlmann.de / 05.2019 / Aufgabe 856