Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Untersuche die Funktion $f(x) = 4e^{0.5x} - 2x - 7$ auf Definitions- und Wertebereich, Nullstellen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte, Asymptoten.

Lösung: I. Allgemein ist hinsichtlich einer Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer Funktion f: D_f -> **R** mit y = f(x) zu beachten:

- Definitionsbereich D_f als Menge aller x-Werte, für die der Funktionsterm f(x) gültig ist
- Wertebereich W_f als Menge aller y-Werte, die von der Funktion f(x) angenommen werden
- f(x) = 0 => Nullstellen der Funktion
- f'(x) = 0 => Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion
- f''(x) = 0 => Wendepunkte der Funktion
- x->+∞: f(x)->±∞ oder f(x)->y als waagerechte oder schiefe Asymptote bzw.: x->-∞: f(x)->±∞ oder f(x)-> y als waagerechte oder schiefe Asymptote

Bei Hoch-, Tief-, Sattel- und Wendepunkten sind noch hinreichende Bedingungen der 2. bzw. 3. Ableitung zu untersuchen.

II. Allgemein gilt: Zu einer differenzierbaren Funktion f: D_f -> **R** bestimmt man numerisch eine Nullstelle x_N mit $f(x_N) = 0$, indem man das Newtonverfahren anwendet, das für einen vorgegebenen (Anfangs-) Wert die Funktion f(x) durch eine Tangente annähert, die Nullstelle der Tangente bestimmt und dieses Verfahren wiederholt (Iteration). Es entsteht dadurch eine Folge von reellen x-Werten x_0 (Anfangswert), x_1, x_2, … vermöge der Iterationsgleichung (für n = 0, 1, 2, …):

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

($f'(x_n) \neq 0$). Die Folge x_1, x_2, … konvergiert dann bei geeignetem Anfangswert x_0 im Allgemeinen gegen die gesuchte Nullstelle x_N der Funktion f(x), also $x_n \to x_N$ (n->∞). Der Anfangswert x_0 ergibt sich dabei z.B. als Wert in einem Intervall [a;b] mit Vorzeichenwechsel der Funktion, also mit $f(a)\cdot f(b) < 0$ (d.h.: f(a)>0, f(b)<0 oder f(a)<0, f(b)>0). Stellen mit f'(x) = 0 (waagerechte Tangenten bei der Funktion f(x)) beeinflussen die Iteration des Newtonverfahrens negativ, das Newtonverfahren kann divergent werden.

III. Definitionsbereich: Als Summe einer e-Funktion $y = 4e^{0,5x}$ und einer linearen Funktion y = -2x–7, die überall definiert sind, ist der Definitionsbereich: D_f = **R**.

IV. Ableitungen: Die Funktion $f(x) = 2e^{0.5x} - 2x - 7$ lässt sich nach Summen-, Faktor-, Potenz- und Kettenregel ableiten. Es gilt:

$f'(x) = 4 \cdot 0{,}5e^{0.5x} - 2 = 2e^{0,5x} - 2$ (1. Ableitung)

$f''(x) = 2 \cdot 0{,}5e^{0.5x} = e^{0,5x}$ (2. Ableitung)

$f'''(x) = 0{,}5e^{0.5x}$ (3. Ableitung).

V. Nullstellen: Die Gleichung f(x) = 0, d.h.: $4e^{0.5x} - 2x - 7 = 0$ ist mit algebraischen Mitteln nicht zu lösen. Wir wenden daher das Newtonverfahren an und haben mit f(-4) = 1,54, f(0) = -7 und f(3) = 4,93 drei Stellen mit wechselnden Vorzeichen, so dass Nullstellen im Intervall [-4; 0] und im Intervall [0; 3] zu erwarten sind. Das Newtonverfahren geschieht nun gemäß der Iterationsvorschrift:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{4e^{0.5x_{n-1}} - 2x_{n-1} - 7}{2e^{0.5x_{n-1}} - 2} \quad (*)$$

mit entsprechenden Anfangswerten x_0.

a) Für das Intervall [-4; 0] wählen wir den Anfangswert x_0 = -4 und erhalten durch Iteration gemäß der Vorschrift (*) die folgende Tabelle:

Iteration n =	x_{n-1} =	$f(x_{n-1})$ =	$f'(x_{n-1})$ =	$x_n = x_n - f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})$	**Nullstelle**
1	-4	1.5413411329464512	-1.7293294335267746	-3.1087058931258355	
2	-3.1087058931258355	0.0627160969581162	-1.5773478446467774	-3.068945419764831	
3	-3.068945419764831	0.0001681546650047494	-1.5688613424323285	-3.0688382371474407	
4	-3.0688382371474407	1.2382654901443856e-9	-1.5688382365283082	-3.0688382363581525	
5	-3.0688382363581525	0	-1.5688382363581527	-3.0688382363581525	
					f(-3.0688382363581525) = 0

Nullstelle ist mithin: N(-3,07|0).

b) Entsprechendes führen wir gemäß (*) für das Intervall [0; 3] mit dem Anfangswert x_0 = 3 durch:

Iteration n =	x_{n-1} =	$f(x_{n-1})$ =	$f'(x_{n-1})$ =	$x_n = x_n - f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})$	**Nullstelle**
1	3	4.926756281352258	6.963378140676129	2.292476125549907	
2	2.292476125549907	1.0003849723638733	4.292668611731844	2.059431121882532	
3	2.059431121882532	0.08221461811408925	3.6005384309395767	2.036597143106576	
4	2.036597143106576	0.0007272467174388453	3.5369607664652953	2.036391529653259	
5	2.036391529653259	5.8519367129861166e-8	3.5363915589129426	2.036391513105497	
6	2.036391513105497	1.7763568394002505e-15	3.5363915131054977	2.0363915131054963	
					f(2.0363915131054963) = 0

Nullstelle ist hier: N(2,04|0).

Damit haben wir die Nullstellen: N(-3,07|0), N(2,04|0).

VI. Hoch-, Tiefpunkte*: Notwendige Bedingung*:

$$f'(x) = 2e^{0,5x} - 2 = 0 \Leftrightarrow 2e^{0,5x} = 2 \Leftrightarrow e^{0,5x} = 1 \Leftrightarrow 0,5x = \ln 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Hinreichende Bedingung:

$$f''(0) = e^0 = 1 > 0.$$

Es liegt damit ein Tiefpunkt als Extremstelle von f(x) vor. Wegen $f(0) = 4e^0 - 2 \cdot 0 - 7 = -3$ lautet der Tiefpunkt auf: T(0|-3).

VI. Wendepunkte: *Notwendige Bedingung*:

$f''(x) = e^{0,5x} = 0 \Rightarrow$ keine Lösung.

Die Funktion f(x) besitzt keine Wendepunkte.

VII. Schiefe Asymptote: Wir betrachten f(x) für betragsmäßig große x, also:

x->-∞ => f(x) = $4e^{0.5x} - 2x - 7$ -> -2x–7 = y (auf Grund von: $4e^{0,5x}$ -> 0)

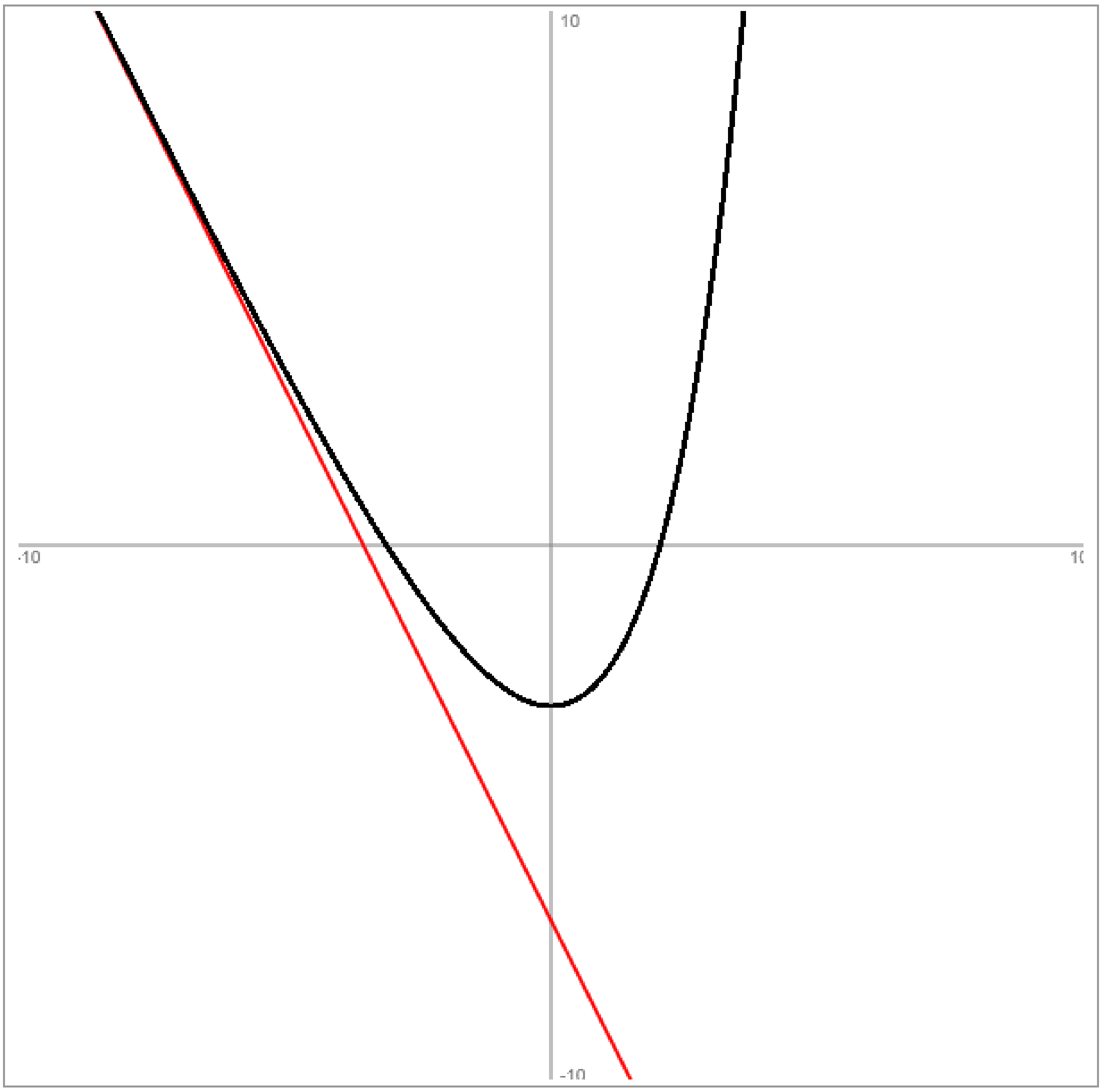
x->+∞ => f(x) = $4e^{0.5x} - 2x - 7$ -> ∞ (auf Grund von $4e^{0,5x}$ -> ∞)

und erhalten y = -2x–7 als schiefe Asymptote bei x->-∞.

VIII. Wertebereich: Auf Grund des Verhaltens der Funktion f(x) für betragsmäßig große x (x->+∞: f(x)->∞) und unter Berücksichtigung des Tiefpunktes T(0|-3) (Monotonieintervalle (-∞; 0) mit fallender, (0; ∞) mit steigender Monotonie) umfasst der Wertebereich von f(x) das Intervall: W_f = [-3; ∞).

X. <u>Wertetabelle, Zeichnung</u>:

x	**y = f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-3.07	0	-1.57	0.22	Nullstelle N(-3.07|0)
0	-3	0	1	Tiefpunkt T(0|-3) = Schnittpunkt S_y(0|-3)
2.04	-0	3.52	2.76	Nullstelle N(2.04|0)



Funktion: $f(x) = 4e^{0,5x}-2x-7$, Asymptote: $y = -2x-7$

www.michael-buhlmann.de / 11.2019 / Aufgabe 892